

Catégories relativement de Goursat

Julia Goedecke

Département de Mathématique
Université catholique de Louvain

Travail en collaboration avec Tamar Janelidze

SIC 5 Novembre, Calais

Catégories de Goursat (Carboni, Kelly, Pedicchio)

Catégorie de Goursat:

- une catégorie régulière \mathcal{A}
- trois-permutabilité:
pour des relations d'équivalence R et S dans \mathcal{A} on a
 $RSR = SRS$

Exemples: catégories de Mal'tsev ($RS = SR$)

Catégories de Goursat (Carboni, Kelly, Pedicchio)

Catégorie de Goursat:

- une catégorie régulière \mathcal{A}
- **trois-permutabilité**:
pour des relations d'équivalence R et S dans \mathcal{A} on a
 $RSR = SRS$

Exemples: catégories de Mal'tsev ($RS = SR$)

Catégories de Goursat (Carboni, Kelly, Pedicchio)

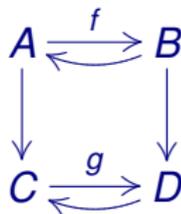
Catégorie de Goursat:

- une catégorie régulière \mathcal{A}
- **trois-permutabilité**:
pour des relations d'équivalence R et S dans \mathcal{A} on a
 $RSR = SRS$

Exemples: catégories de Mal'tsev ($RS = SR$)

Conditions équivalentes (Gran, Rodelo)

- une catégorie régulière \mathcal{A} est de Goursat ssi pour chaque épi scindé d'épis réguliers dans \mathcal{A}



le morphisme induit entre les paires noyaux $R[f]$ et $R[g]$ est aussi un épi régulier.

Goursat pushout

Conditions équivalentes (Gran, Rodelo)

- une catégorie régulière \mathcal{A} est de Goursat ssi pour chaque épi scindé d'épis réguliers dans \mathcal{A}

$$\begin{array}{ccccc}
 R[f] & \rightrightarrows & A & \xrightarrow{f} & B \\
 \vdots & & \downarrow & & \downarrow \\
 R[g] & \rightrightarrows & C & \xrightarrow{g} & D
 \end{array}$$

le morphisme induit entre les paires noyaux $R[f]$ et $R[g]$ est aussi un épi régulier.

Goursat pushout

Conditions équivalentes (Gran, Rodelo)

- une catégorie régulière \mathcal{A} est de Goursat ssi pour chaque épi scindé d'épis réguliers dans \mathcal{A}

$$\begin{array}{ccccc}
 R[f] & \rightrightarrows & A & \xrightarrow{f} & B \\
 \vdots & & \downarrow & & \downarrow \\
 R[g] & \rightrightarrows & C & \xrightarrow{g} & D
 \end{array}$$

le morphisme induit entre les paires noyaux $R[f]$ et $R[g]$ est aussi un épi régulier.

Goursat pushout

Conditions équivalentes (Gran, Rodelo)

- une catégorie régulière \mathcal{A} est de Goursat ssi le lemme des neuf dénormalisé est valide dans \mathcal{A} .

$$\begin{array}{ccccc}
 \bar{F} & \rightrightarrows & F & \longrightarrow & G \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 H & \rightrightarrows & A & \longrightarrow & C \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 K & \rightrightarrows & B & \longrightarrow & D
 \end{array}$$

- Toutes les colonnes et la ligne centrale sont exactes (paire noyau et coégalisateur);
- la première ligne est exacte \Leftrightarrow la dernière ligne est exacte.

(Version dénormalisée introduite dans Mal'tsev par Bourn.)

Conditions équivalentes (Gran, Rodelo)

- une catégorie régulière \mathcal{A} est de Goursat ssi le lemme des neuf dénormalisé est valide dans \mathcal{A} .

$$\begin{array}{ccccc}
 \bar{F} & \rightrightarrows & F & \longrightarrow & G \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 H & \rightrightarrows & A & \longrightarrow & C \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 K & \rightrightarrows & B & \longrightarrow & D
 \end{array}$$

- Toutes les colonnes et la ligne centrale sont exactes (paire noyau et coégalisateur);
 - la première ligne est exacte \Leftrightarrow la dernière ligne est exacte.
- (Version dénormalisée introduite dans Mal'tsev par Bourn.)

Conditions équivalentes (Gran, Rodelo)

- une catégorie régulière \mathcal{A} est de Goursat ssi le lemme des neuf dénormalisé est valide dans \mathcal{A} .

$$\begin{array}{ccccc}
 \bar{F} & \rightrightarrows & F & \longrightarrow & G \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 H & \rightrightarrows & A & \longrightarrow & C \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 K & \rightrightarrows & B & \longrightarrow & D
 \end{array}$$

- Toutes les colonnes et la ligne centrale sont exactes (paire noyau et coégalisateur);
- la première ligne est exacte \Leftrightarrow la dernière ligne est exacte.

(Version dénormalisée introduite dans Mal'tsev par Bourn.)

Conditions équivalentes (Gran, Rodelo)

- une catégorie régulière \mathcal{A} est de Goursat ssi le lemme des neuf dénormalisé est valide dans \mathcal{A} .

$$\begin{array}{ccccc}
 \bar{F} & \rightrightarrows & F & \longrightarrow & G \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 H & \rightrightarrows & A & \longrightarrow & C \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 K & \rightrightarrows & B & \longrightarrow & D
 \end{array}$$

- Toutes les colonnes et la ligne centrale sont exactes (paire noyau et coégalisateur);
- la première ligne est exacte \Leftrightarrow la dernière ligne est exacte.

(Version dénormalisée introduite dans Mal'tsev par Bourn.)

Version relative

- Remplacer les épis réguliers par une classe $\mathcal{E} \subseteq \text{RegEpi}\mathcal{A}$ qui satisfait des conditions appropriées.
- Cela s'insère bien dans le contexte des catégories relativement semi-abéliennes et relativement homologiques de T. Janelidze.

relativement semi-abélien \Rightarrow relativement homologique \Rightarrow
relativement de Mal'tsev (régulier) \Rightarrow relativement de Goursat
 \Rightarrow relativement régulier

Version relative

- Remplacer les épis réguliers par une classe $\mathcal{E} \subseteq \text{RegEpi}\mathcal{A}$ qui satisfait des conditions appropriées.
- Cela s'insère bien dans le contexte des catégories relativement semi-abéliennes et relativement homologiques de T. Janelidze.

relativement semi-abélien \Rightarrow relativement homologique \Rightarrow
relativement de Mal'tsev (régulier) \Rightarrow relativement de Goursat
 \Rightarrow relativement régulier

Version relative

- Remplacer les épis réguliers par une classe $\mathcal{E} \subseteq \text{RegEpi}\mathcal{A}$ qui satisfait des conditions appropriées.
- Cela s'insère bien dans le contexte des catégories relativement semi-abéliennes et relativement homologiques de T. Janelidze.

relativement semi-abélien \Rightarrow relativement homologique \Rightarrow
relativement de Mal'tsev (régulier) \Rightarrow relativement de Goursat
 \Rightarrow relativement régulier

Plan

- 1 Catégories relativement régulières
 - Définition
 - Relations relatives
 - \mathcal{E} -image
- 2 Axiome relativement de Goursat
 - Trois conditions équivalentes
 - Lemme des neuf dénormalisé relatif
 - Relativement de Goursat et relativement de Mal'tsev

Plan

- 1 Catégories relativement régulières
 - Définition
 - Relations relatives
 - \mathcal{E} -image
- 2 Axiome relativement de Goursat
 - Trois conditions équivalentes
 - Lemme des neuf dénormalisé relatif
 - Relativement de Goursat et relativement de Mal'tsev

Plan

- 1 Catégories relativement régulières
 - Définition
 - Relations relatives
 - \mathcal{E} -image
- 2 Axiome relativement de Goursat
 - Trois conditions équivalentes
 - Lemme des neuf dénormalisé relatif
 - Relativement de Goursat et relativement de Mal'tsev

Relativement régulier

Catégorie relativement régulière:

$(\mathcal{A}, \mathcal{E})$, \mathcal{A} avec produits finis, $\mathcal{E} \subseteq \text{RegEpi}\mathcal{A}$ et

(E1) tous les isomorphismes sont dans \mathcal{E} ;

(E2) les pullbacks des morphismes de \mathcal{E} existent dans \mathcal{A} et sont dans \mathcal{E} ;

(E3) \mathcal{E} est fermé par composition;

(E4) si $f \in \mathcal{E}$ et $gf \in \mathcal{E}$ alors $g \in \mathcal{E}$; $\xrightarrow{f} \xrightarrow{g}$

(F) si un morphisme f dans \mathcal{A} se factorise en $f = em$ avec m mono et $e \in \mathcal{E}$, alors aussi en $f = m'e'$ avec m' mono et $e' \in \mathcal{E}$.



Relativement régulier

Catégorie relativement régulière:

$(\mathcal{A}, \mathcal{E})$, \mathcal{A} avec produits finis, $\mathcal{E} \subseteq \text{RegEpi}\mathcal{A}$ et

(E1) tous les isomorphismes sont dans \mathcal{E} ;

(E2) les pullbacks des morphismes de \mathcal{E} existent dans \mathcal{A} et sont dans \mathcal{E} ;

(E3) \mathcal{E} est fermé par composition;

(E4) si $f \in \mathcal{E}$ et $gf \in \mathcal{E}$ alors $g \in \mathcal{E}$; $\xrightarrow{f} \xrightarrow{g}$

(F) si un morphisme f dans \mathcal{A} se factorise en $f = em$ avec m mono et $e \in \mathcal{E}$, alors aussi en $f = m'e'$ avec m' mono et $e' \in \mathcal{E}$.



Relativement régulier

Catégorie relativement régulière:

$(\mathcal{A}, \mathcal{E})$, \mathcal{A} avec produits finis, $\mathcal{E} \subseteq \text{RegEpi}\mathcal{A}$ et

- (E1) tous les isomorphismes sont dans \mathcal{E} ;
- (E2) les pullbacks des morphismes de \mathcal{E} existent dans \mathcal{A} et sont dans \mathcal{E} ;
- (E3) \mathcal{E} est fermé par composition;
- (E4) si $f \in \mathcal{E}$ et $gf \in \mathcal{E}$ alors $g \in \mathcal{E}$;
- (F) si un morphisme f dans \mathcal{A} se factorise en $f = em$ avec m mono et $e \in \mathcal{E}$, alors aussi en $f = m'e'$ avec m' mono et $e' \in \mathcal{E}$.

$$\xrightarrow{f} \xrightarrow{g}$$



Relativement régulier

Catégorie relativement régulière:

$(\mathcal{A}, \mathcal{E})$, \mathcal{A} avec produits finis, $\mathcal{E} \subseteq \text{RegEpi}\mathcal{A}$ et

- (E1) tous les isomorphismes sont dans \mathcal{E} ;
- (E2) les pullbacks des morphismes de \mathcal{E} existent dans \mathcal{A} et sont dans \mathcal{E} ;
- (E3) \mathcal{E} est fermé par composition;
- (E4) si $f \in \mathcal{E}$ et $gf \in \mathcal{E}$ alors $g \in \mathcal{E}$;
- (F) si un morphisme f dans \mathcal{A} se factorise en $f = em$ avec m mono et $e \in \mathcal{E}$, alors aussi en $f = m'e'$ avec m' mono et $e' \in \mathcal{E}$.

$$\xrightarrow{f} \xrightarrow{g}$$



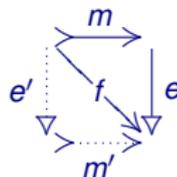
Relativement régulier

Catégorie relativement régulière:

$(\mathcal{A}, \mathcal{E})$, \mathcal{A} avec produits finis, $\mathcal{E} \subseteq \text{RegEpi}\mathcal{A}$ et

- (E1) tous les isomorphismes sont dans \mathcal{E} ;
- (E2) les pullbacks des morphismes de \mathcal{E} existent dans \mathcal{A} et sont dans \mathcal{E} ;
- (E3) \mathcal{E} est fermé par composition;
- (E4) si $f \in \mathcal{E}$ et $gf \in \mathcal{E}$ alors $g \in \mathcal{E}$;
- (F) si un morphisme f dans \mathcal{A} se factorise en $f = em$ avec m mono et $e \in \mathcal{E}$, alors aussi en $f = m'e'$ avec m' mono et $e' \in \mathcal{E}$.

$$\xrightarrow{f} \xrightarrow{g}$$



Relativement régulier

Exemple (cas absolu): Si \mathcal{A} a des limites finies et des coégalisateurs de paires noyaux, et $\mathcal{E} = \text{RegEpi}\mathcal{A}$, alors $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ est relativement régulière ssi \mathcal{A} est régulière.

Les catégories relativement régulières sont notre contexte pour travailler avec des relations relatives.

Relativement régulier

Exemple (cas absolu): Si \mathcal{A} a des limites finies et des coégalisateurs de paires noyaux, et $\mathcal{E} = \text{RegEpi}\mathcal{A}$, alors $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ est relativement régulière ssi \mathcal{A} est régulière.

Les catégories relativement régulières sont notre contexte pour travailler avec des relations relatives.

\mathcal{E} -relations

\mathcal{E} -relation $R = (R, r_1, r_2): A \longrightarrow B$:

- Relation $R \xrightarrow{\langle r_1, r_2 \rangle} A \times B$
- $r_1: R \longrightarrow A$ et $r_2: R \longrightarrow B$ dans \mathcal{E} .
- L'opposée: $R^\circ = (R, r_2, r_1): B \longrightarrow A$.
- $f \in \mathcal{E} \Rightarrow f = (A, 1_A, f): A \longrightarrow B$ une \mathcal{E} -relation grâce à (E1).

\mathcal{E} -relations

\mathcal{E} -relation $R = (R, r_1, r_2): A \longrightarrow B$:

- Relation $R \xrightarrow{\langle r_1, r_2 \rangle} A \times B$
- $r_1: R \longrightarrow A$ et $r_2: R \longrightarrow B$ dans \mathcal{E} .
- L'opposée: $R^\circ = (R, r_2, r_1): B \longrightarrow A$.
- $f \in \mathcal{E} \Rightarrow f = (A, 1_A, f): A \longrightarrow B$ une \mathcal{E} -relation grâce à (E1).

\mathcal{E} -relations

\mathcal{E} -relation $R = (R, r_1, r_2): A \longrightarrow B$:

- Relation $R \xrightarrow{\langle r_1, r_2 \rangle} A \times B$
- $r_1: R \longrightarrow A$ et $r_2: R \longrightarrow B$ dans \mathcal{E} .
- L'opposée: $R^\circ = (R, r_2, r_1): B \longrightarrow A$.
- $f \in \mathcal{E} \Rightarrow f = (A, 1_A, f): A \longrightarrow B$ une \mathcal{E} -relation grâce à (E1).

\mathcal{E} -relations

\mathcal{E} -relation $R = (R, r_1, r_2): A \longrightarrow B$:

- Relation $R \xrightarrow{\langle r_1, r_2 \rangle} A \times B$
- $r_1: R \longrightarrow A$ et $r_2: R \longrightarrow B$ dans \mathcal{E} .
- L'opposée: $R^\circ = (R, r_2, r_1): B \longrightarrow A$.
- $f \in \mathcal{E} \Rightarrow f = (A, 1_A, f): A \longrightarrow B$ une \mathcal{E} -relation grâce à (E1).

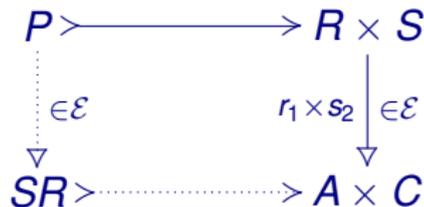
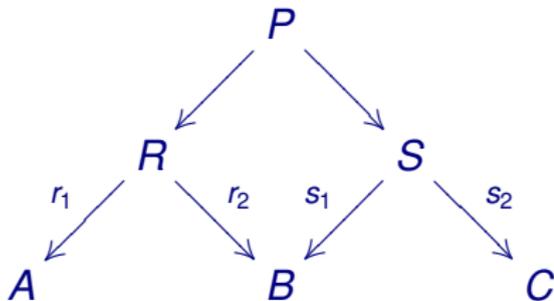
Composition des \mathcal{E} -relations

Soient $R: A \longrightarrow B$ et $S: B \longrightarrow C$ des \mathcal{E} -relations dans \mathcal{A} .

Grâce à (E2), (E3), (E4), $SR \rhd \longrightarrow A \times C$ est une \mathcal{E} -relation.

Composition des \mathcal{E} -relations

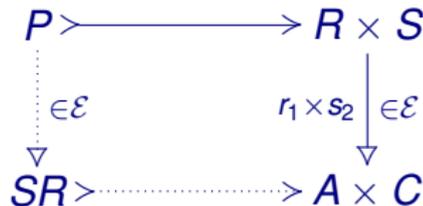
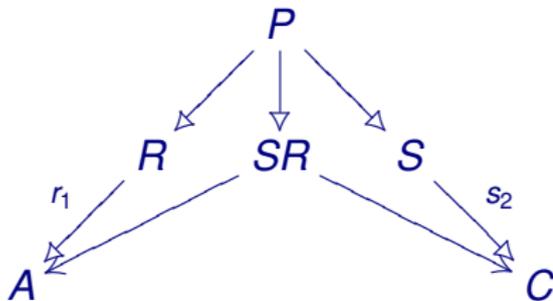
Soient $R: A \rightarrow B$ et $S: B \rightarrow C$ des \mathcal{E} -relations dans \mathcal{A} .



Grâce à (E2), (E3), (E4), $SR \rightarrow A \times C$ est une \mathcal{E} -relation.

Composition des \mathcal{E} -relations

Soient $R: A \rightarrow B$ et $S: B \rightarrow C$ des \mathcal{E} -relations dans \mathcal{A} .



Grâce à (E2), (E3), (E4), $SR \twoheadrightarrow A \times C$ est une \mathcal{E} -relation.

Propriétés des \mathcal{E} -relations

Toutes les propriétés “habituelles” des relations sont satisfaites par les \mathcal{E} -relations, par exemple (pour $f \in \mathcal{E}$):

- $R \leq R'$ et $S \leq S' \Rightarrow SR \leq S'R'$
- $f \circ f = R[f]$ (paire noyau)
- $ff^\circ = 1_B$
- $R = r_2 r_1^\circ$

On peut définir une \mathcal{E} -relation réflexive, symétrique, transitive comme d'habitude, et

- R est une \mathcal{E} -relation d'équivalence \mathcal{E} -effective si c'est la paire noyau d'un $f \in \mathcal{E}$.

Propriétés des \mathcal{E} -relations

Toutes les propriétés “habituelles” des relations sont satisfaites par les \mathcal{E} -relations, par exemple (pour $f \in \mathcal{E}$):

- $R \leq R'$ et $S \leq S' \Rightarrow SR \leq S'R'$
- $f \circ f = R[f]$ (paire noyau)
- $ff^\circ = 1_B$
- $R = r_2 r_1^\circ$

On peut définir une \mathcal{E} -relation réflexive, symétrique, transitive comme d'habitude, et

- R est une \mathcal{E} -relation d'équivalence \mathcal{E} -effective si c'est la paire noyau d'un $f \in \mathcal{E}$.

Propriétés des \mathcal{E} -relations

Toutes les propriétés “habituelles” des relations sont satisfaites par les \mathcal{E} -relations, par exemple (pour $f \in \mathcal{E}$):

- $R \leq R'$ et $S \leq S' \Rightarrow SR \leq S'R'$
- $f \circ f = R[f]$ (paire noyau)
- $ff^\circ = 1_B$
- $R = r_2 r_1^\circ$

On peut définir une \mathcal{E} -relation réflexive, symétrique, transitive comme d'habitude, et

- R est une \mathcal{E} -relation d'équivalence \mathcal{E} -effective si c'est la paire noyau d'un $f \in \mathcal{E}$.

Propriétés des \mathcal{E} -relations

Toutes les propriétés “habituelles” des relations sont satisfaites par les \mathcal{E} -relations, par exemple (pour $f \in \mathcal{E}$):

- $R \leq R'$ et $S \leq S' \Rightarrow SR \leq S'R'$
- $f \circ f = R[f]$ (paire noyau)
- $ff^\circ = 1_B$
- $R = r_2 r_1^\circ$

On peut définir une \mathcal{E} -relation réflexive, symétrique, transitive comme d'habitude, et

- R est une \mathcal{E} -relation d'équivalence \mathcal{E} -effective si c'est la paire noyau d'un $f \in \mathcal{E}$.

Propriétés des \mathcal{E} -relations

Toutes les propriétés “habituelles” des relations sont satisfaites par les \mathcal{E} -relations, par exemple (pour $f \in \mathcal{E}$):

- $R \leq R'$ et $S \leq S' \Rightarrow SR \leq S'R'$
- $f \circ f = R[f]$ (paire noyau)
- $ff^\circ = 1_B$
- $R = r_2 r_1^\circ$

On peut définir une \mathcal{E} -relation réflexive, symétrique, transitive comme d'habitude, et

- R est une \mathcal{E} -relation d'équivalence \mathcal{E} -effective si c'est la paire noyau d'un $f \in \mathcal{E}$.

Propriétés des \mathcal{E} -relations

Toutes les propriétés “habituelles” des relations sont satisfaites par les \mathcal{E} -relations, par exemple (pour $f \in \mathcal{E}$):

- $R \leq R'$ et $S \leq S' \Rightarrow SR \leq S'R'$
- $f \circ f = R[f]$ (paire noyau)
- $ff^\circ = 1_B$
- $R = r_2 r_1^\circ$

On peut définir une \mathcal{E} -relation **réflexive, symétrique, transitive** comme d'habitude, et

- R est une \mathcal{E} -relation d'équivalence \mathcal{E} -effective si c'est la paire noyau d'un $f \in \mathcal{E}$.

Propriétés des \mathcal{E} -relations

Toutes les propriétés “habituelles” des relations sont satisfaites par les \mathcal{E} -relations, par exemple (pour $f \in \mathcal{E}$):

- $R \leq R'$ et $S \leq S' \Rightarrow SR \leq S'R'$
- $f \circ f = R[f]$ (paire noyau)
- $ff^\circ = 1_B$
- $R = r_2 r_1^\circ$

On peut définir une \mathcal{E} -relation **réflexive, symétrique, transitive** comme d'habitude, et

- R est une **\mathcal{E} -relation d'équivalence \mathcal{E} -effective** si c'est la paire noyau d'un $f \in \mathcal{E}$.

Conditions équivalentes pour \mathcal{E} -relations

Proposition

Soit (A, \mathcal{E}) une catégorie relativement régulière. Les conditions suivantes sont équivalentes:

- *$RSR = SRS$ pour des \mathcal{E} -relations d'équivalence R et S ;*
- *$RSR = SRS$ pour des \mathcal{E} -relations d'équivalence \mathcal{E} -effectives;*
- *chaque \mathcal{E} -relation P satisfait $PP^\circ PP^\circ = PP^\circ$;*
- *pour chaque \mathcal{E} -relation réflexive E , l' \mathcal{E} -relation EE° est une \mathcal{E} -relation d'équivalence;*
- *pour chaque \mathcal{E} -relation réflexive E , EE° est transitive;*
- *pour chaque \mathcal{E} -relation réflexive E , on a $EE^\circ = E^\circ E$.*

Même preuve que pour le cas absolu.

Conditions équivalentes pour \mathcal{E} -relations

Proposition

Soit (A, \mathcal{E}) une catégorie relativement régulière. Les conditions suivantes sont équivalentes:

- *$RSR = SRS$ pour des \mathcal{E} -relations d'équivalence R et S ;*
- *$RSR = SRS$ pour des \mathcal{E} -relations d'équivalence \mathcal{E} -effectives;*
- *chaque \mathcal{E} -relation P satisfait $PP^\circ PP^\circ = PP^\circ$;*
- *pour chaque \mathcal{E} -relation réflexive E , l' \mathcal{E} -relation EE° est une \mathcal{E} -relation d'équivalence;*
- *pour chaque \mathcal{E} -relation réflexive E , EE° est transitive;*
- *pour chaque \mathcal{E} -relation réflexive E , on a $EE^\circ = E^\circ E$.*

Même preuve que pour le cas absolu.

Conditions équivalentes pour \mathcal{E} -relations

Proposition

Soit (A, \mathcal{E}) une catégorie relativement régulière. Les conditions suivantes sont équivalentes:

- $RSR = SRS$ pour des \mathcal{E} -relations d'équivalence R et S ;
- $RSR = SRS$ pour des \mathcal{E} -relations d'équivalence \mathcal{E} -effectives;
- chaque \mathcal{E} -relation P satisfait $PP^\circ PP^\circ = PP^\circ$;
- pour chaque \mathcal{E} -relation réflexive E , l' \mathcal{E} -relation EE° est une \mathcal{E} -relation d'équivalence;
- pour chaque \mathcal{E} -relation réflexive E , EE° est transitive;
- pour chaque \mathcal{E} -relation réflexive E , on a $EE^\circ = E^\circ E$.

Même preuve que pour le cas absolu.

Conditions équivalentes pour \mathcal{E} -relations

Proposition

Soit (A, \mathcal{E}) une catégorie relativement régulière. Les conditions suivantes sont équivalentes:

- *$RSR = SRS$ pour des \mathcal{E} -relations d'équivalence R et S ;*
- *$RSR = SRS$ pour des \mathcal{E} -relations d'équivalence \mathcal{E} -effectives;*
- *chaque \mathcal{E} -relation P satisfait $PP^\circ PP^\circ = PP^\circ$;*
- *pour chaque \mathcal{E} -relation réflexive E , l' \mathcal{E} -relation EE° est une \mathcal{E} -relation d'équivalence;*
- *pour chaque \mathcal{E} -relation réflexive E , EE° est transitive;*
- *pour chaque \mathcal{E} -relation réflexive E , on a $EE^\circ = E^\circ E$.*

Même preuve que pour le cas absolu.

Conditions équivalentes pour \mathcal{E} -relations

Proposition

Soit (A, \mathcal{E}) une catégorie relativement régulière. Les conditions suivantes sont équivalentes:

- *$RSR = SRS$ pour des \mathcal{E} -relations d'équivalence R et S ;*
- *$RSR = SRS$ pour des \mathcal{E} -relations d'équivalence \mathcal{E} -effectives;*
- *chaque \mathcal{E} -relation P satisfait $PP^\circ PP^\circ = PP^\circ$;*
- *pour chaque \mathcal{E} -relation réflexive E , l' \mathcal{E} -relation EE° est une \mathcal{E} -relation d'équivalence;*
- *pour chaque \mathcal{E} -relation réflexive E , EE° est transitive;*
- *pour chaque \mathcal{E} -relation réflexive E , on a $EE^\circ = E^\circ E$.*

Même preuve que pour le cas absolu.

Conditions équivalentes pour \mathcal{E} -relations

Proposition

Soit (A, \mathcal{E}) une catégorie relativement régulière. Les conditions suivantes sont équivalentes:

- *$RSR = SRS$ pour des \mathcal{E} -relations d'équivalence R et S ;*
- *$RSR = SRS$ pour des \mathcal{E} -relations d'équivalence \mathcal{E} -effectives;*
- *chaque \mathcal{E} -relation P satisfait $PP^\circ PP^\circ = PP^\circ$;*
- *pour chaque \mathcal{E} -relation réflexive E , l' \mathcal{E} -relation EE° est une \mathcal{E} -relation d'équivalence;*
- *pour chaque \mathcal{E} -relation réflexive E , EE° est transitive;*
- *pour chaque \mathcal{E} -relation réflexive E , on a $EE^\circ = E^\circ E$.*

Même preuve que pour le cas absolu.

Conditions équivalentes pour \mathcal{E} -relations

Proposition

Soit (A, \mathcal{E}) une catégorie relativement régulière. Les conditions suivantes sont équivalentes:

- *$RSR = SRS$ pour des \mathcal{E} -relations d'équivalence R et S ;*
- *$RSR = SRS$ pour des \mathcal{E} -relations d'équivalence \mathcal{E} -effectives;*
- *chaque \mathcal{E} -relation P satisfait $PP^\circ PP^\circ = PP^\circ$;*
- *pour chaque \mathcal{E} -relation réflexive E , l' \mathcal{E} -relation EE° est une \mathcal{E} -relation d'équivalence;*
- *pour chaque \mathcal{E} -relation réflexive E , EE° est transitive;*
- *pour chaque \mathcal{E} -relation réflexive E , on a $EE^\circ = E^\circ E$.*

Même preuve que pour le cas absolu.

Conditions équivalentes pour \mathcal{E} -relations

Proposition

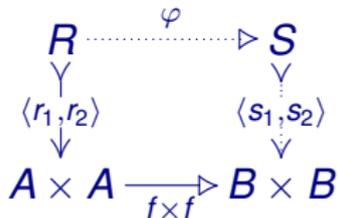
Soit (A, \mathcal{E}) une catégorie relativement régulière. Les conditions suivantes sont équivalentes:

- *$RSR = SRS$ pour des \mathcal{E} -relations d'équivalence R et S ;*
- *$RSR = SRS$ pour des \mathcal{E} -relations d'équivalence \mathcal{E} -effectives;*
- *chaque \mathcal{E} -relation P satisfait $PP^\circ PP^\circ = PP^\circ$;*
- *pour chaque \mathcal{E} -relation réflexive E , l' \mathcal{E} -relation EE° est une \mathcal{E} -relation d'équivalence;*
- *pour chaque \mathcal{E} -relation réflexive E , EE° est transitive;*
- *pour chaque \mathcal{E} -relation réflexive E , on a $EE^\circ = E^\circ E$.*

Même preuve que pour le cas absolu.

Soient (R, r_1, r_2) une \mathcal{E} -relation sur A et $f: A \rightarrow B$ dans \mathcal{E} .

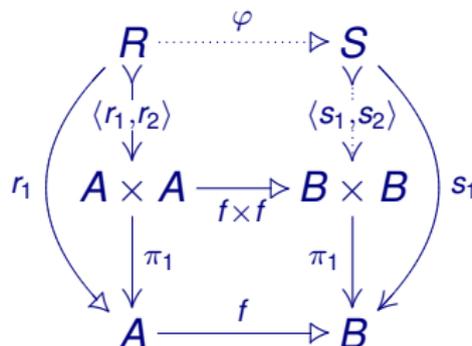
\mathcal{E} -image $f(R) = S$ de R sur f :



- R réflexive $\Rightarrow f(R)$ réflexive
- R symétrique $\Rightarrow f(R)$ symétrique
- $f(R) = fRf^\circ = fr_2r_1^\circ f^\circ$

Soient (R, r_1, r_2) une \mathcal{E} -relation sur A et $f: A \rightarrow B$ dans \mathcal{E} .

\mathcal{E} -image $f(R) = S$ de R sur f :

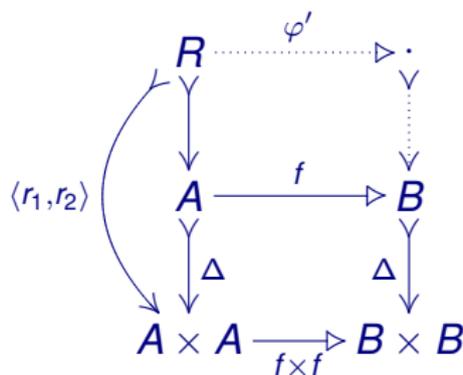


Grâce à (F) la factorisation existe, grâce à (E3) et (E4) S est une \mathcal{E} -relation.

- R réflexive $\Rightarrow f(R)$ réflexive
- R symétrique $\Rightarrow f(R)$ symétrique
- $f(R) = fRf^\circ = fr_2r_1^\circ f^\circ$

Soient (R, r_1, r_2) une \mathcal{E} -relation sur A et $f: A \rightarrow B$ dans \mathcal{E} .

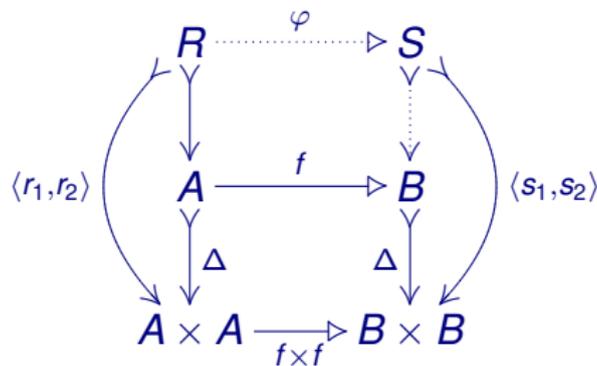
\mathcal{E} -image $f(R) = S$ de R sur f :



- R réflexive $\Rightarrow f(R)$ réflexive
- R symétrique $\Rightarrow f(R)$ symétrique
- $f(R) = fRf^\circ = fr_2r_1^\circ f^\circ$

Soient (R, r_1, r_2) une \mathcal{E} -relation sur A et $f: A \rightarrow B$ dans \mathcal{E} .

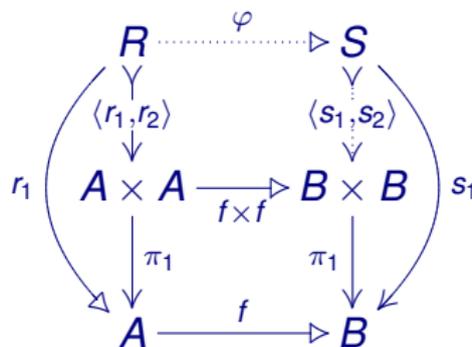
\mathcal{E} -image $f(R) = S$ de R sur f :



- R réflexive $\Rightarrow f(R)$ réflexive
- R symétrique $\Rightarrow f(R)$ symétrique
- $f(R) = fRf^\circ = fr_2r_1^\circ f^\circ$

Soient (R, r_1, r_2) une \mathcal{E} -relation sur A et $f: A \rightarrow B$ dans \mathcal{E} .

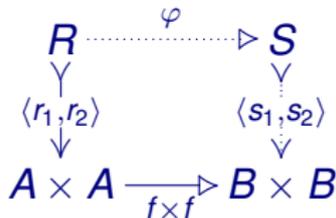
\mathcal{E} -image $f(R) = S$ de R sur f :



- R réflexive $\Rightarrow f(R)$ réflexive
- R symétrique $\Rightarrow f(R)$ symétrique
- $f(R) = fRf^\circ = fr_2r_1^\circ$

Soient (R, r_1, r_2) une \mathcal{E} -relation sur A et $f: A \rightarrow B$ dans \mathcal{E} .

\mathcal{E} -image $f(R) = S$ de R sur f :



- R réflexive $\Rightarrow f(R)$ réflexive
- R symétrique $\Rightarrow f(R)$ symétrique
- $f(R) = fRf^\circ = fr_2r_1^\circ f^\circ$

Plan

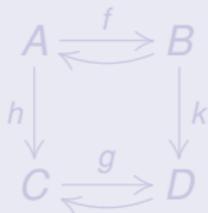
- 1 Catégories relativement régulières
 - Définition
 - Relations relatives
 - \mathcal{E} -image
- 2 Axiome relativement de Goursat
 - Trois conditions équivalentes
 - Lemme des neuf dénormalisé relatif
 - Relativement de Goursat et relativement de Mal'tsev

Conditions équivalentes de Goursat

Theorem

Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ une catégorie relativement régulière. TFAE:

- 1 *Axiome de \mathcal{E} -Goursat: pour chaque morphisme d'épis scindés*



dans \mathcal{A} avec f, g, h et k dans \mathcal{E} , le morphisme induit entre $R[f]$ et $R[g]$ est aussi dans \mathcal{E} ;

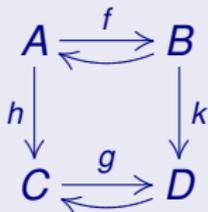
- 2 *\mathcal{E} -image préserve des \mathcal{E} -relations d'équivalence;*
- 3 *$RSR = SRS$ pour des \mathcal{E} -relations d'équivalence R et S .*

Conditions équivalentes de Goursat

Theorem

Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ une catégorie relativement régulière. TFAE:

- 1 **Axiome de \mathcal{E} -Goursat**: pour chaque morphisme d'épis scindés



dans \mathcal{A} avec f , g , h et k dans \mathcal{E} , le morphisme induit entre $R[f]$ et $R[g]$ est aussi dans \mathcal{E} ;

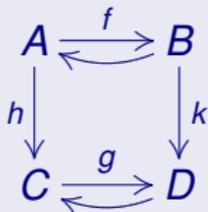
- 2 \mathcal{E} -image préserve des \mathcal{E} -relations d'équivalence;
- 3 $RSR = SRS$ pour des \mathcal{E} -relations d'équivalence R et S .

Conditions équivalentes de Goursat

Theorem

Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ une catégorie relativement régulière. TFAE:

- 1 **Axiome de \mathcal{E} -Goursat**: pour chaque morphisme d'épis scindés



dans \mathcal{A} avec f, g, h et k dans \mathcal{E} , le morphisme induit entre $R[f]$ et $R[g]$ est aussi dans \mathcal{E} ;

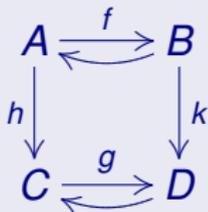
- 2 \mathcal{E} -image préserve des \mathcal{E} -relations d'équivalence;
- 3 $RSR = SRS$ pour des \mathcal{E} -relations d'équivalence R et S .

Conditions équivalentes de Goursat

Theorem

Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ une catégorie relativement régulière. TFAE:

- 1 **Axiome de \mathcal{E} -Goursat**: pour chaque morphisme d'épis scindés



dans \mathcal{A} avec f, g, h et k dans \mathcal{E} , le morphisme induit entre $R[f]$ et $R[g]$ est aussi dans \mathcal{E} ;

- 2 \mathcal{E} -image préserve des \mathcal{E} -relations d'équivalence;
- 3 $RSR = SRS$ pour des \mathcal{E} -relations d'équivalence R et S .

Esquisse de preuve

1 \Rightarrow 2: R une \mathcal{E} -relation d'équivalence $\Rightarrow f(R)$ réflexive et symétrique.

Pour transitivité montrer l'existence d'un morphisme

$$\begin{array}{ccc}
 R[s_1] & \xrightarrow{t_s} & S \\
 \pi_1 \downarrow & & \downarrow s_1 \\
 S & \xrightarrow{s_2} & B \\
 \pi_2 \downarrow & & \downarrow s_2
 \end{array}$$

Esquisse de preuve

1 \Rightarrow 2: R une \mathcal{E} -relation d'équivalence $\Rightarrow f(R)$ réflexive et symétrique.

Pour transitivité montrer l'existence d'un morphisme

$$\begin{array}{ccc}
 R[s_1] & \xrightarrow{t_s} & S \\
 \pi_1 \downarrow & & \downarrow s_1 \\
 S & \xrightarrow{s_2} & B \\
 \pi_2 \downarrow & & \downarrow s_2
 \end{array}$$

Esquisse de preuve

$$\begin{array}{ccccc}
 R[r_1] & \rightrightarrows & R & \begin{array}{c} \xrightarrow{r_1} \\ \xleftarrow{e_R} \end{array} & A \\
 \bar{\varphi} \downarrow & & \varphi \downarrow & & \downarrow f \\
 R[s_1] & \rightrightarrows & S & \begin{array}{c} \xrightarrow{s_1} \\ \xleftarrow{e_S} \end{array} & B
 \end{array}$$

- l'axiome de \mathcal{E} -Goursat $\Rightarrow \bar{\varphi} \in \mathcal{E}$
- $\bar{\varphi} \in \mathcal{E} \Rightarrow \bar{\varphi}$ un épi régulier $\Rightarrow \bar{\varphi}$ un épi fort
- $\langle s_1, s_2 \rangle$ un mono

$$\begin{array}{ccc}
 R[r_1] & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & R[s_1] \\
 \varphi \circ t_R \downarrow & \swarrow t_S & \downarrow (s_2 \times s_2) \circ \langle \pi_1, \pi_2 \rangle \\
 S & \xrightarrow{\langle s_1, s_2 \rangle} & B \times B
 \end{array}$$

Esquisse de preuve

$$\begin{array}{ccccc}
 R[r_1] & \rightrightarrows & R & \begin{array}{c} \xrightarrow{r_1} \\ \xleftarrow{e_R} \end{array} & A \\
 \bar{\varphi} \downarrow & & \varphi \downarrow & & \downarrow f \\
 R[s_1] & \rightrightarrows & S & \begin{array}{c} \xrightarrow{s_1} \\ \xleftarrow{e_S} \end{array} & B
 \end{array}$$

- l'axiome de \mathcal{E} -Goursat $\Rightarrow \bar{\varphi} \in \mathcal{E}$
- $\bar{\varphi} \in \mathcal{E} \Rightarrow \bar{\varphi}$ un épi régulier $\Rightarrow \bar{\varphi}$ un épi fort
- $\langle s_1, s_2 \rangle$ un mono

$$\begin{array}{ccc}
 R[r_1] & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & R[s_1] \\
 \varphi \circ t_R \downarrow & \swarrow t_S & \downarrow (s_2 \times s_2) \circ \langle \pi_1, \pi_2 \rangle \\
 S & \xrightarrow{\langle s_1, s_2 \rangle} & B \times B
 \end{array}$$

Esquisse de preuve

$$\begin{array}{ccccc}
 R[r_1] & \rightrightarrows & R & \begin{array}{c} \xrightarrow{r_1} \\ \xleftarrow{e_R} \end{array} & A \\
 \bar{\varphi} \downarrow & & \varphi \downarrow & & \downarrow f \\
 R[s_1] & \rightrightarrows & S & \begin{array}{c} \xrightarrow{s_1} \\ \xleftarrow{e_S} \end{array} & B
 \end{array}$$

- l'axiome de \mathcal{E} -Goursat $\Rightarrow \bar{\varphi} \in \mathcal{E}$
- $\bar{\varphi} \in \mathcal{E} \Rightarrow \bar{\varphi}$ un épi régulier $\Rightarrow \bar{\varphi}$ un épi fort
- $\langle s_1, s_2 \rangle$ un mono

$$\begin{array}{ccc}
 R[r_1] & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & R[s_1] \\
 \varphi \circ t_R \downarrow & \swarrow t_S & \downarrow (s_2 \times s_2) \circ \langle \pi_1, \pi_2 \rangle \\
 S & \xrightarrow{\langle s_1, s_2 \rangle} & B \times B
 \end{array}$$

Esquisse de preuve

2 \Rightarrow 3: Montrer EE° est une \mathcal{E} -relation d'équivalence pour (E, e_1, e_2) reflexive.

- $EE^\circ = e_2 e_1^\circ e_1 e_2^\circ = e_2 R[e_1] e_2^\circ = e_2(R[e_1])$
- $R[e_1]$ une \mathcal{E} -relation d'équivalence, $e_2 \in \mathcal{E}$;
- l' \mathcal{E} -image préserve des \mathcal{E} -relations d'équivalence.

Alors $EE^\circ = e_2(R[e_1])$ est une \mathcal{E} -relation d'équivalence.

Esquisse de preuve

2 \Rightarrow 3: Montrer EE° est une \mathcal{E} -relation d'équivalence pour (E, e_1, e_2) reflexive.

- $EE^\circ = e_2 e_1^\circ e_1 e_2^\circ = e_2 R[e_1] e_2^\circ = e_2(R[e_1])$
- $R[e_1]$ une \mathcal{E} -relation d'équivalence, $e_2 \in \mathcal{E}$;
- l' \mathcal{E} -image préserve des \mathcal{E} -relations d'équivalence.

Alors $EE^\circ = e_2(R[e_1])$ est une \mathcal{E} -relation d'équivalence.

Esquisse de preuve

2 \Rightarrow 3: Montrer EE° est une \mathcal{E} -relation d'équivalence pour (E, e_1, e_2) reflexive.

- $EE^\circ = e_2 e_1^\circ e_1 e_2^\circ = e_2 R[e_1] e_2^\circ = e_2(R[e_1])$
- $R[e_1]$ une \mathcal{E} -relation d'équivalence, $e_2 \in \mathcal{E}$;
- l' \mathcal{E} -image préserve des \mathcal{E} -relations d'équivalence.

Alors $EE^\circ = e_2(R[e_1])$ est une \mathcal{E} -relation d'équivalence.

Esquisse de preuve

2 \Rightarrow 3: Montrer EE° est une \mathcal{E} -relation d'équivalence pour (E, e_1, e_2) reflexive.

- $EE^\circ = e_2 e_1^\circ e_1 e_2^\circ = e_2 R[e_1] e_2^\circ = e_2(R[e_1])$
- $R[e_1]$ une \mathcal{E} -relation d'équivalence, $e_2 \in \mathcal{E}$;
- l' \mathcal{E} -image préserve des \mathcal{E} -relations d'équivalence.

Alors $EE^\circ = e_2(R[e_1])$ est une \mathcal{E} -relation d'équivalence.

Esquisse de preuve

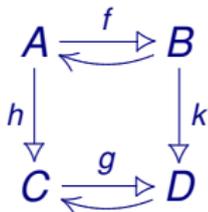
2 \Rightarrow 3: Montrer EE° est une \mathcal{E} -relation d'équivalence pour (E, e_1, e_2) reflexive.

- $EE^\circ = e_2 e_1^\circ e_1 e_2^\circ = e_2 R[e_1] e_2^\circ = e_2(R[e_1])$
- $R[e_1]$ une \mathcal{E} -relation d'équivalence, $e_2 \in \mathcal{E}$;
- l' \mathcal{E} -image préserve des \mathcal{E} -relations d'équivalence.

Alors $EE^\circ = e_2(R[e_1])$ est une \mathcal{E} -relation d'équivalence.

Esquisse de preuve

3 \Rightarrow 1:

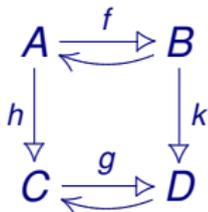


$R[h] \longrightarrow R[k]$ dans $\mathcal{E} \Rightarrow f(R[h]) = R[k]$. On calcule $h(R[f])$:

$$\begin{aligned}
 h(R[f]) &= hf^\circ fh^\circ && = hh^\circ hf^\circ fh^\circ hh^\circ \\
 &= hR[h]R[f]R[h]h^\circ && = hR[f]R[h]R[f]h^\circ \\
 &= hf^\circ fh^\circ hf^\circ fh^\circ && = hf^\circ f(R[h])fh^\circ \\
 &= hf^\circ k^\circ kfh^\circ && = hh^\circ g^\circ ghh^\circ \\
 &= g^\circ g && = R[g]
 \end{aligned}$$

Esquisse de preuve

3 \Rightarrow 1:

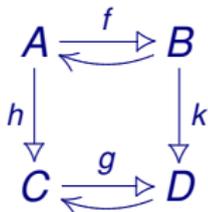


$R[h] \longrightarrow R[k]$ dans $\mathcal{E} \Rightarrow f(R[h]) = R[k]$. On calcule $h(R[f])$:

$$\begin{aligned}
 h(R[f]) &= hf^\circ fh^\circ & &= hh^\circ hf^\circ fh^\circ hh^\circ \\
 &= hR[h]R[f]R[h]h^\circ & &= hR[f]R[h]R[f]h^\circ \\
 &= hf^\circ fh^\circ hf^\circ fh^\circ & &= hf^\circ f(R[h])fh^\circ \\
 &= hf^\circ k^\circ kfh^\circ & &= hh^\circ g^\circ ghh^\circ \\
 &= g^\circ g & &= R[g]
 \end{aligned}$$

Esquisse de preuve

3 \Rightarrow 1:

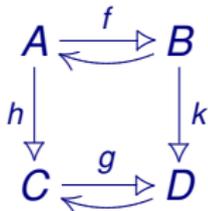


$R[h] \longrightarrow R[k]$ dans $\mathcal{E} \Rightarrow f(R[h]) = R[k]$. On calcule $h(R[f])$:

$$\begin{aligned}
 h(R[f]) &= hf^\circ fh^\circ & &= hh^\circ hf^\circ fh^\circ hh^\circ \\
 &= hR[h]R[f]R[h]h^\circ & &= hR[f]R[h]R[f]h^\circ \\
 &= hf^\circ fh^\circ hf^\circ fh^\circ & &= hf^\circ f(R[h])fh^\circ \\
 &= hf^\circ k^\circ kfh^\circ & &= hh^\circ g^\circ ghh^\circ \\
 &= g^\circ g & &= R[g]
 \end{aligned}$$

Esquisse de preuve

3 \Rightarrow 1:

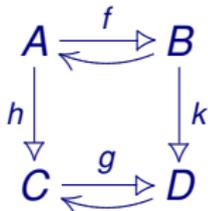


$R[h] \longrightarrow R[k]$ dans $\mathcal{E} \Rightarrow f(R[h]) = R[k]$. On calcule $h(R[f])$:

$$\begin{aligned}
 h(R[f]) &= hf^\circ fh^\circ & &= hh^\circ hf^\circ fh^\circ hh^\circ \\
 &= hR[h]R[f]R[h]h^\circ & &= hR[f]R[h]R[f]h^\circ \\
 &= hf^\circ fh^\circ hf^\circ fh^\circ & &= hf^\circ f(R[h])fh^\circ \\
 &= hf^\circ k^\circ kfh^\circ & &= hh^\circ g^\circ ghh^\circ \\
 &= g^\circ g & &= R[g]
 \end{aligned}$$

Esquisse de preuve

3 \Rightarrow 1:

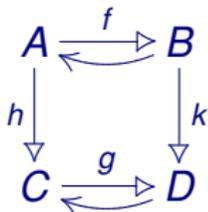


$R[h] \longrightarrow R[k]$ dans $\mathcal{E} \Rightarrow f(R[h]) = R[k]$. On calcule $h(R[f])$:

$$\begin{aligned}
 h(R[f]) &= hf^\circ fh^\circ & &= hh^\circ hf^\circ fh^\circ hh^\circ \\
 &= hR[h]R[f]R[h]h^\circ & &= hR[f]R[h]R[f]h^\circ \\
 &= hf^\circ fh^\circ hf^\circ fh^\circ & &= hf^\circ f(R[h])fh^\circ \\
 &= hf^\circ k^\circ kfh^\circ & &= hh^\circ g^\circ ghh^\circ \\
 &= g^\circ g & &= R[g]
 \end{aligned}$$

Esquisse de preuve

3 \Rightarrow 1:

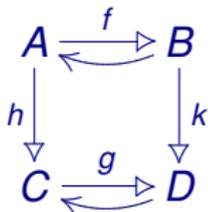


$R[h] \longrightarrow R[k]$ dans $\mathcal{E} \Rightarrow f(R[h]) = R[k]$. On calcule $h(R[f])$:

$$\begin{aligned}
 h(R[f]) &= hf^\circ fh^\circ & &= hh^\circ hf^\circ fh^\circ hh^\circ \\
 &= hR[h]R[f]R[h]h^\circ & &= hR[f]R[h]R[f]h^\circ \\
 &= hf^\circ fh^\circ hf^\circ fh^\circ & &= hf^\circ f(R[h])fh^\circ \\
 &= hf^\circ k^\circ kfh^\circ & &= hh^\circ g^\circ ghh^\circ \\
 &= g^\circ g & &= R[g]
 \end{aligned}$$

Esquisse de preuve

3 \Rightarrow 1:

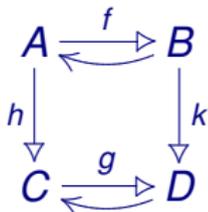


$R[h] \longrightarrow R[k]$ dans $\mathcal{E} \Rightarrow f(R[h]) = R[k]$. On calcule $h(R[f])$:

$$\begin{aligned}
 h(R[f]) &= hf^\circ fh^\circ & &= hh^\circ hf^\circ fh^\circ hh^\circ \\
 &= hR[h]R[f]R[h]h^\circ & &= hR[f]R[h]R[f]h^\circ \\
 &= hf^\circ fh^\circ hf^\circ fh^\circ & &= hf^\circ f(R[h])fh^\circ \\
 &= hf^\circ k^\circ kfh^\circ & &= hh^\circ g^\circ ghh^\circ \\
 &= g^\circ g & &= R[g]
 \end{aligned}$$

Esquisse de preuve

3 \Rightarrow 1:

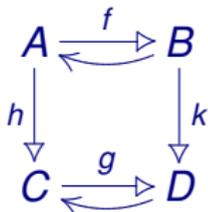


$R[h] \longrightarrow R[k]$ dans $\mathcal{E} \Rightarrow f(R[h]) = R[k]$. On calcule $h(R[f])$:

$$\begin{aligned}
 h(R[f]) &= hf^\circ fh^\circ & &= hh^\circ hf^\circ fh^\circ hh^\circ \\
 &= hR[h]R[f]R[h]h^\circ & &= hR[f]R[h]R[f]h^\circ \\
 &= hf^\circ fh^\circ hf^\circ fh^\circ & &= hf^\circ f(R[h])fh^\circ \\
 &= hf^\circ k^\circ kfh^\circ & &= hh^\circ g^\circ ghh^\circ \\
 &= g^\circ g & &= R[g]
 \end{aligned}$$

Esquisse de preuve

3 \Rightarrow 1:

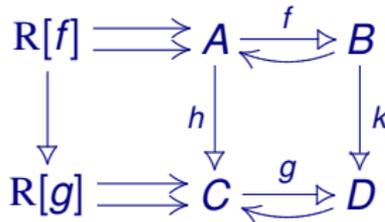


$R[h] \longrightarrow R[k]$ dans $\mathcal{E} \Rightarrow f(R[h]) = R[k]$. On calcule $h(R[f])$:

$$\begin{aligned}
 h(R[f]) &= hf^\circ fh^\circ & &= hh^\circ hf^\circ fh^\circ hh^\circ \\
 &= hR[h]R[f]R[h]h^\circ & &= hR[f]R[h]R[f]h^\circ \\
 &= hf^\circ fh^\circ hf^\circ fh^\circ & &= hf^\circ f(R[h])fh^\circ \\
 &= hf^\circ k^\circ kfh^\circ & &= hh^\circ g^\circ ghh^\circ \\
 &= g^\circ g & &= R[g]
 \end{aligned}$$

Esquisse de preuve

3 \Rightarrow 1:



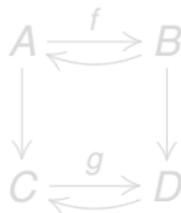
$R[h] \longrightarrow R[k]$ dans $\mathcal{E} \Rightarrow f(R[h]) = R[k]$. On calcule $h(R[f])$:

$$\begin{aligned}
 h(R[f]) &= hf^\circ fh^\circ & &= hh^\circ hf^\circ fh^\circ hh^\circ \\
 &= hR[h]R[f]R[h]h^\circ & &= hR[f]R[h]R[f]h^\circ \\
 &= hf^\circ fh^\circ hf^\circ fh^\circ & &= hf^\circ f(R[h])fh^\circ \\
 &= hf^\circ k^\circ kfh^\circ & &= hh^\circ g^\circ ghh^\circ \\
 &= g^\circ g & &= R[g]
 \end{aligned}$$

Catégorie relativement de Goursat

Une **catégorie relativement de Goursat** est une catégorie relativement régulière $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ qui satisfait en plus

- **Axiome de \mathcal{E} -Goursat**: pour chaque morphisme d'épis scindés



dans \mathcal{A} avec f , g , h et k dans \mathcal{E} , le morphisme induit entre $R[f]$ et $R[g]$ est aussi dans \mathcal{E} .

Catégorie relativement de Goursat

Une **catégorie relativement de Goursat** est une catégorie relativement régulière $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ qui satisfait en plus

- **Axiome de \mathcal{E} -Goursat**: pour chaque morphisme d'épis scindés

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & B \\
 \downarrow & \rightleftarrows & \downarrow \\
 C & \xrightarrow{g} & D
 \end{array}$$

dans \mathcal{A} avec f, g, h et k dans \mathcal{E} , le morphisme induit entre $R[f]$ et $R[g]$ est aussi dans \mathcal{E} .

Lemme des neuf relatif

Lemme des neuf dénormalisé relatif:

$$\begin{array}{ccccc}
 \bar{F} & \rightrightarrows & F & \longrightarrow & G \\
 \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
 H & \rightrightarrows & A & \longrightarrow & C \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 K & \rightrightarrows & B & \longrightarrow & D
 \end{array}$$

- Toutes les colonnes et la ligne centrale sont \mathcal{E} -exactes (paire noyau et coégalisateur dans \mathcal{E});
- la première ligne est \mathcal{E} -exacte \Leftrightarrow la dernière ligne est \mathcal{E} -exacte.

Lemme des neuf relatif

Lemme des neuf dénormalisé relatif:

$$\begin{array}{ccccc}
 \bar{F} & \rightrightarrows & F & \longrightarrow & G \\
 \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
 H & \rightrightarrows & A & \longrightarrow & C \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 K & \rightrightarrows & B & \longrightarrow & D
 \end{array}$$

- Toutes les colonnes et la ligne centrale sont \mathcal{E} -exactes (paire noyau et coégalisateur dans \mathcal{E});
- la première ligne est \mathcal{E} -exacte \Leftrightarrow la dernière ligne est \mathcal{E} -exacte.

Lemme de neuf relatif

On peut montrer:

- $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ une catégorie relativement de Goursat \Rightarrow le lemme de neuf relatif est valide;
(cas absolu: montré par Lack)
- une moitié du lemme de neuf relatif \Rightarrow l'autre moitié du lemme de neuf relatif;
- une moitié du lemme de neuf relatif \Rightarrow l'axiome de \mathcal{E} -Goursat.
(cas absolu: montré par Gran, Rodelo)

Lemme de neuf relatif

On peut montrer:

- $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ une catégorie relativement de Goursat \Rightarrow le lemme de neuf relatif est valide;
(cas absolu: montré par Lack)
- une moitié du lemme de neuf relatif \Rightarrow l'autre moitié du lemme de neuf relatif;
- une moitié du lemme de neuf relatif \Rightarrow l'axiome de \mathcal{E} -Goursat.
(cas absolu: montré par Gran, Rodelo)

Lemme de neuf relatif

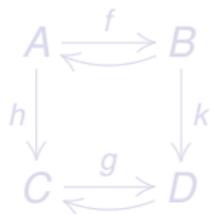
On peut montrer:

- $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ une catégorie relativement de Goursat \Rightarrow le lemme de neuf relatif est valide;
(cas absolu: montré par Lack)
- une moitié du lemme de neuf relatif \Rightarrow l'autre moitié du lemme de neuf relatif;
- une moitié du lemme de neuf relatif \Rightarrow l'axiome de \mathcal{E} -Goursat.
(cas absolu: montré par Gran, Rodelo)

Catégorie relativement de Mal'tsev

Une **catégorie relativement de Mal'tsev** est une catégorie relativement régulière $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ qui satisfait en plus

- **Axiome de \mathcal{E} -Mal'tsev**: pour chaque morphisme d'épis scindés



dans \mathcal{A} avec f, g, h et k dans \mathcal{E} , le morphisme induit $\langle f, h \rangle: A \rightarrow B \times_D C$ vers le pullback est dans \mathcal{E} .

Catégorie relativement de Mal'tsev

Une **catégorie relativement de Mal'tsev** est une catégorie relativement régulière $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ qui satisfait en plus

- **Axiome de \mathcal{E} -Mal'tsev**: pour chaque morphisme d'épis scindés

$$\begin{array}{ccc} A & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} & B \\ \downarrow h & & \downarrow k \\ C & \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} & D \end{array}$$

dans \mathcal{A} avec f, g, h et k dans \mathcal{E} , le morphisme induit $\langle f, h \rangle : A \rightarrow B \times_D C$ vers le pullback est dans \mathcal{E} .

Conditions équivalentes de Mal'tsev

Theorem

Soit (A, \mathcal{E}) une catégorie relativement régulière. TFAE:

- 1 *l'axiome de \mathcal{E} -Mal'tsev;*
- 2 *$RS = SR$ pour des \mathcal{E} -relation d'équivalence;*
- 3 *chaque \mathcal{E} -relation réflexive E est une \mathcal{E} -relation d'équivalence;*
- 4 *chaque objet \mathcal{E} -simplicial est \mathcal{E} -Kan.*

Conditions équivalentes de Mal'tsev

Theorem

Soit (A, \mathcal{E}) une catégorie relativement régulière. TFAE:

- 1 *l'axiome de \mathcal{E} -Mal'tsev;*
- 2 *$RS = SR$ pour des \mathcal{E} -relation d'équivalence;*
- 3 *chaque \mathcal{E} -relation réflexive E est une \mathcal{E} -relation d'équivalence;*
- 4 *chaque objet \mathcal{E} -simplicial est \mathcal{E} -Kan.*

Conditions équivalentes de Mal'tsev

Theorem

Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ une catégorie relativement régulière. TFAE:

- 1 l'axiome de \mathcal{E} -Mal'tsev;
- 2 $RS = SR$ pour des \mathcal{E} -relation d'équivalence;
- 3 chaque \mathcal{E} -relation réflexive E est une \mathcal{E} -relation d'équivalence;
- 4 chaque objet \mathcal{E} -simplicial est \mathcal{E} -Kan.

Conditions équivalentes de Mal'tsev

Theorem

Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ une catégorie relativement régulière. TFAE:

- 1 *l'axiome de \mathcal{E} -Mal'tsev;*
- 2 *$RS = SR$ pour des \mathcal{E} -relation d'équivalence;*
- 3 *chaque \mathcal{E} -relation réflexive E est une \mathcal{E} -relation d'équivalence;*
- 4 *chaque objet \mathcal{E} -simplicial est \mathcal{E} -Kan.*

Conditions équivalentes de Mal'tsev

Theorem

Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ une catégorie relativement régulière. TFAE:

- 1 *l'axiome de \mathcal{E} -Mal'tsev;*
- 2 *$RS = SR$ pour des \mathcal{E} -relation d'équivalence;*
- 3 *chaque \mathcal{E} -relation réflexive E est une \mathcal{E} -relation d'équivalence;*
- 4 *chaque objet \mathcal{E} -simplicial est \mathcal{E} -Kan.*

Comparaison

L'axiome de \mathcal{E} -Mal'tsev \Rightarrow l'axiome de \mathcal{E} -Goursat

par exemple via:

$RS = SR$ pour tout les \mathcal{E} -relations d'équivalence \Rightarrow

$RSR = SRS$ pour tout les \mathcal{E} -relations d'équivalence

Comparaison

L'axiome de \mathcal{E} -Mal'tsev \Rightarrow l'axiome de \mathcal{E} -Goursat

par exemple via:

$RS = SR$ pour tout les \mathcal{E} -relations d'équivalence \Rightarrow

$RSR = SRS$ pour tout les \mathcal{E} -relations d'équivalence

Résumé

- On peut définir une catégorie **relativement** de Goursat.
- Les conditions équivalentes du cas absolu peuvent être adapté dans le cas relatif:
 - l'Axiome de \mathcal{E} -Goursat (\mathcal{E} -Goursat pushout);
 - l' \mathcal{E} -image préserve des \mathcal{E} -relations d'équivalence;
 - $RSR = SRS$ pour des \mathcal{E} -relations d'équivalence;
 - le lemme de neuf dénormalisé relatif.

Résumé

- On peut définir une catégorie **relativement** de Goursat.
- Les conditions équivalentes du cas absolu peuvent être adapté dans le cas relatif:
 - l'Axiome de \mathcal{E} -Goursat (\mathcal{E} -Goursat pushout);
 - l' \mathcal{E} -image préserve des \mathcal{E} -relations d'équivalence;
 - $RSR = SRS$ pour des \mathcal{E} -relations d'équivalence;
 - le lemme de neuf dénormalisé relatif.

Résumé

- On peut définir une catégorie **relativement** de Goursat.
- Les conditions équivalentes du cas absolu peuvent être adapté dans le cas relatif:
 - l'Axiome de \mathcal{E} -Goursat (\mathcal{E} -Goursat pushout);
 - l' \mathcal{E} -image préserve des \mathcal{E} -relations d'équivalence;
 - $RSR = SRS$ pour des \mathcal{E} -relations d'équivalence;
 - le lemme de neuf dénormalisé relatif.

Résumé

- On peut définir une catégorie **relativement** de Goursat.
- Les conditions équivalentes du cas absolu peuvent être adapté dans le cas relatif:
 - l'Axiome de \mathcal{E} -Goursat (\mathcal{E} -Goursat pushout);
 - l' \mathcal{E} -image préserve des \mathcal{E} -relations d'équivalence;
 - $RSR = SRS$ pour des \mathcal{E} -relations d'équivalence;
 - le lemme de neuf dénormalisé relatif.

Résumé

- On peut définir une catégorie **relativement** de Goursat.
- Les conditions équivalentes du cas absolu peuvent être adapté dans le cas relatif:
 - l'Axiome de \mathcal{E} -Goursat (\mathcal{E} -Goursat pushout);
 - l' \mathcal{E} -image préserve des \mathcal{E} -relations d'équivalence;
 - $RSR = SRS$ pour des \mathcal{E} -relations d'équivalence;
 - le lemme de neuf dénormalisé relatif.

Résumé

- On peut définir une catégorie **relativement** de Goursat.
- Les conditions équivalentes du cas absolu peuvent être adapté dans le cas relatif:
 - l'Axiome de \mathcal{E} -Goursat (\mathcal{E} -Goursat pushout);
 - l' \mathcal{E} -image préserve des \mathcal{E} -relations d'équivalence;
 - $RSR = SRS$ pour des \mathcal{E} -relations d'équivalence;
 - le lemme de neuf dénormalisé relatif.

Merci pour écouter !

