Catégories relativement de Goursat

Julia Goedecke

Département de Mathematique
Université catholique de Louvain

Travail en collaboration avec Tamar Janelidze

SIC 5 Novembre, Calais

Catégories de Goursat (Carboni, Kelly, Pedicchio)

Catégorie de Goursat:

- une catégorie régulière $\mathcal{A}$
- trois-permutabilité:
  pour des relations d'équivalence R et S dans $\mathcal{A}$ on a $RSR = SRS$

Exemples: catégories de Mal'tsev ($RS = SR$)

Catégories de Goursat (Carboni, Kelly, Pedicchio)

Catégorie de Goursat:

- une catégorie régulière $\mathcal{A}$
- trois-permutabilité:
  pour des relations d'équivalence R et S dans $\mathcal{A}$ on a
  $RSR = SRS$

Exemples: catégories de Mal'tsev ($RS = SR$)

Catégories de Goursat (Carboni, Kelly, Pedicchio)

Catégorie de Goursat:

- une catégorie régulière $\mathcal{A}$
- trois-permutabilité:
  pour des relations d'équivalence R et S dans $\mathcal{A}$ on a $RSR = SRS$

Exemples: catégories de Mal'tsev ($RS = SR$)

Conditions équivalentes (Gran, Rodelo)

- une catégorie régulière $\mathcal{A}$ est de Goursat ssi pour chaque épi scindé d'épis réguliers dans $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[d] & B \arrow[l, shift left] \arrow[d] \\ C \arrow[r, shift left, "g"] & D \arrow[l, shift left] \end{tikzcd}$$

le morphisme induit entre les paires noyaux $\mathrm{R}[f]$ et $\mathrm{R}[g]$ est aussi un épi régulier.

Goursat pushout

Conditions équivalentes (Gran, Rodelo)

- une catégorie régulière $\mathcal{A}$ est de Goursat ssi pour chaque épi scindé d'épis réguliers dans $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{R}[f] \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, dotted] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[d] & B \arrow[l, shift left] \arrow[d] \\
\mathrm{R}[g] \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & C \arrow[r, shift left, "g"] & D \arrow[l, shift left]
\end{tikzcd}$$

le morphisme induit entre les paires noyaux $\mathrm{R}[f]$ et $\mathrm{R}[g]$ est aussi un épi régulier.

Goursat pushout

Conditions équivalentes (Gran, Rodelo)

- une catégorie régulière $\mathcal{A}$ est de Goursat ssi pour chaque épi scindé d'épis réguliers dans $\mathcal{A}$

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{R}[f] \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, dotted] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[d] & B \arrow[l, shift left] \arrow[d] \\
\mathrm{R}[g] \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & C \arrow[r, shift left, "g"] & D \arrow[l, shift left]
\end{tikzcd}
$$

le morphisme induit entre les paires noyaux $\mathrm{R}[f]$ et $\mathrm{R}[g]$ est aussi un épi régulier.

Goursat pushout

Conditions équivalentes (Gran, Rodelo)

- une catégorie régulière $\mathcal{A}$ est de Goursat ssi le lemme des neuf dénormalisé est valide dans $\mathcal{A}$.

$$\begin{tikzcd}
\overline{F} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & F \arrow[r] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & G \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\
H \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[d] \\
K \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & B \arrow[r] & D
\end{tikzcd}$$

- Toutes les colonnes et la ligne centrale sont exactes (paire noyau et coégalisateur);
- la première ligne est exacte $\Leftrightarrow$ la dernière ligne est exacte.

(Version dénormalisée introduite dans Mal'tsev par Bourn.)

Conditions équivalentes (Gran, Rodelo)

- une catégorie régulière $\mathcal{A}$ est de Goursat ssi le lemme des neuf dénormalisé est valide dans $\mathcal{A}$.

$$\begin{tikzcd}
\overline{F} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & F \arrow[r] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & G \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\
H \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[d] \\
K \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & B \arrow[r] & D
\end{tikzcd}$$

  - Toutes les colonnes et la ligne centrale sont exactes (paire noyau et coégalisateur);
  - la première ligne est exacte $\Leftrightarrow$ la dernière ligne est exacte.

(Version dénormalisée introduite dans Mal'tsev par Bourn.)

Conditions équivalentes (Gran, Rodelo)

- une catégorie régulière $\mathcal{A}$ est de Goursat ssi le lemme des neuf dénormalisé est valide dans $\mathcal{A}$.

$$
\begin{tikzcd}
\overline{F} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & F \arrow[r] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & G \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\
H \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[d] \\
K \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & B \arrow[r] & D
\end{tikzcd}
$$

  - Toutes les colonnes et la ligne centrale sont exactes (paire noyau et coégalisateur);
  - la première ligne est exacte $\Leftrightarrow$ la dernière ligne est exacte.

(Version dénormalisée introduite dans Mal'tsev par Bourn.)

Conditions équivalentes (Gran, Rodelo)

- une catégorie régulière $\mathcal{A}$ est de Goursat ssi le lemme des neuf dénormalisé est valide dans $\mathcal{A}$.

$$
\begin{tikzcd}
\overline{F} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & F \arrow[r] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & G \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\
H \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[d] \\
K \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & B \arrow[r] & D
\end{tikzcd}
$$

  - Toutes les colonnes et la ligne centrale sont exactes (paire noyau et coégalisateur);
  - la première ligne est exacte $\Leftrightarrow$ la dernière ligne est exacte.

(Version dénormalisée introduite dans Mal'tsev par Bourn.)

Version relative

- Remplacer les épis réguliers par une classe $\mathcal{E} \subseteq \mathrm{RegEpi}\mathcal{A}$ qui satisfait des conditions appropriées.
- Cela s'insère bien dans le contexte des catégories relativement semi-abéliennes et relativement homologiques de T. Janelidze.

relativement semi-abélien $\Rightarrow$ relativement homologique $\Rightarrow$ relativement de Mal'tsev (régulier) $\Rightarrow$ relativement de Goursat $\Rightarrow$ relativement régulier

Version relative

- Remplacer les épis réguliers par une classe $\mathcal{E} \subseteq \mathrm{RegEpi}\mathcal{A}$ qui satisfait des conditions appropriées.
- Cela s'insère bien dans le contexte des catégories relativement semi-abéliennes et relativement homologiques de T. Janelidze.

relativement semi-abélien $\Rightarrow$ relativement homologique $\Rightarrow$ relativement de Mal'tsev (régulier) $\Rightarrow$ relativement de Goursat $\Rightarrow$ relativement régulier

Version relative

- Remplacer les épis réguliers par une classe $\mathcal{E} \subseteq \mathrm{RegEpi}\mathcal{A}$ qui satisfait des conditions appropriées.
- Cela s'insère bien dans le contexte des catégories relativement semi-abéliennes et relativement homologiques de T. Janelidze.

relativement semi-abélien $\Rightarrow$ relativement homologique $\Rightarrow$ relativement de Mal'tsev (régulier) $\Rightarrow$ relativement de Goursat $\Rightarrow$ relativement régulier

Plan

1. Catégories relativement régulières
   - Définition
   - Relations relatives
   - $\mathcal{E}$-image
2. Axiome relativement de Goursat
   - Trois conditions équivalentes
   - Lemme des neuf dénormalisé relatif
   - Relativement de Goursat et relativement de Mal'tsev

Plan

1. Catégories relativement régulières
   - Définition
   - Relations relatives
   - $\mathcal{E}$-image
2. Axiome relativement de Goursat
   - Trois conditions équivalentes
   - Lemme des neuf dénormalisé relatif
   - Relativement de Goursat et relativement de Mal'tsev

Plan

1. Catégories relativement régulières
   - Définition
   - Relations relatives
   - $\mathcal{E}$-image

2. Axiome relativement de Goursat
   - Trois conditions équivalentes
   - Lemme des neuf dénormalisé relatif
   - Relativement de Goursat et relativement de Mal'tsev

Relativement régulier

Catégorie relativement régulière:

$(\mathcal{A},\mathcal{E})$, $\mathcal{A}$ avec produits finis, $\mathcal{E} \subseteq \mathrm{RegEpi}\mathcal{A}$ et

(E1) tous les isomorphismes sont dans $\mathcal{E}$;

(E2) les pullbacks des morphismes de $\mathcal{E}$ existent dans $\mathcal{A}$ et sont dans $\mathcal{E}$;

(E3) $\mathcal{E}$ est fermé par composition;

(E4) si $f \in \mathcal{E}$ et $gf \in \mathcal{E}$ alors $g \in \mathcal{E}$;

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "f"] & \cdot \arrow[r, "g"] & \cdot \end{tikzcd}$$

(F) si un morphisme f dans $\mathcal{A}$ se factorise en $f = em$ avec m mono et $e \in \mathcal{E}$, alors aussi en $f = m'e'$ avec m' mono et $e' \in \mathcal{E}$.

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, tail, "m"] \arrow[d, dotted, "e'"'] \arrow[dr, "f"] & \cdot \arrow[d, "e"] \\ \cdot \arrow[r, tail, dotted, "m'"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

Relativement régulier

Catégorie relativement régulière:

$(\mathcal{A},\mathcal{E})$, $\mathcal{A}$ avec produits finis, $\mathcal{E} \subseteq \mathrm{RegEpi}\mathcal{A}$ et

(E1) tous les isomorphismes sont dans $\mathcal{E}$;

(E2) les pullbacks des morphismes de $\mathcal{E}$ existent dans $\mathcal{A}$ et sont dans $\mathcal{E}$;

(E3) $\mathcal{E}$ est fermé par composition;

(E4) si $f \in \mathcal{E}$ et $gf \in \mathcal{E}$ alors $g \in \mathcal{E}$; $\quad \xrightarrow{f} \xrightarrow{g}$

(F) si un morphisme f dans $\mathcal{A}$ se factorise en $f = em$ avec m mono et $e \in \mathcal{E}$, alors aussi en $f = m'e'$ avec m' mono et $e' \in \mathcal{E}$.

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, tail, "m"] \arrow[d, dotted, "e'"'] \arrow[dr, "f"] & \cdot \arrow[d, "e"] \\ \cdot \arrow[r, dotted, tail, "m'"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

Relativement régulier

Catégorie relativement régulière:

$(\mathcal{A},\mathcal{E})$, $\mathcal{A}$ avec produits finis, $\mathcal{E} \subseteq \mathrm{RegEpi}\mathcal{A}$ et

(E1) tous les isomorphismes sont dans $\mathcal{E}$;

(E2) les pullbacks des morphismes de $\mathcal{E}$ existent dans $\mathcal{A}$ et sont dans $\mathcal{E}$;

(E3) $\mathcal{E}$ est fermé par composition;

(E4) si $f \in \mathcal{E}$ et $gf \in \mathcal{E}$ alors $g \in \mathcal{E}$; $\xrightarrow{f}\xrightarrow{g}$

(F) si un morphisme f dans $\mathcal{A}$ se factorise en $f = em$ avec m mono et $e \in \mathcal{E}$, alors aussi en $f = m'e'$ avec m' mono et $e' \in \mathcal{E}$.

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, tail, "m"] \arrow[d, dotted, two heads, "e'"'] \arrow[dr, "f"] & \cdot \arrow[d, two heads, "e"] \\ \cdot \arrow[r, dotted, tail, "m'"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

Relativement régulier

Catégorie relativement régulière:

$(\mathcal{A},\mathcal{E})$, $\mathcal{A}$ avec produits finis, $\mathcal{E} \subseteq \mathrm{RegEpi}\mathcal{A}$ et

(E1) tous les isomorphismes sont dans $\mathcal{E}$;

(E2) les pullbacks des morphismes de $\mathcal{E}$ existent dans $\mathcal{A}$ et sont dans $\mathcal{E}$;

(E3) $\mathcal{E}$ est fermé par composition;

(E4) si $f \in \mathcal{E}$ et $gf \in \mathcal{E}$ alors $g \in \mathcal{E}$; $\xrightarrow{f}\xrightarrow{g}$

(F) si un morphisme f dans $\mathcal{A}$ se factorise en $f = em$ avec m mono et $e \in \mathcal{E}$, alors aussi en $f = m'e'$ avec m' mono et $e' \in \mathcal{E}$.

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, tail, "m"] \arrow[d, dotted, "e'"'] \arrow[dr, "f"] & \cdot \arrow[d, "e"] \\ \cdot \arrow[r, tail, dotted, "m'"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

Relativement régulier

Catégorie relativement régulière:

$(\mathcal{A},\mathcal{E})$, $\mathcal{A}$ avec produits finis, $\mathcal{E} \subseteq \mathrm{RegEpi}\mathcal{A}$ et

- (E1) tous les isomorphismes sont dans $\mathcal{E}$;
- (E2) les pullbacks des morphismes de $\mathcal{E}$ existent dans $\mathcal{A}$ et sont dans $\mathcal{E}$;
- (E3) $\mathcal{E}$ est fermé par composition;
- (E4) si $f \in \mathcal{E}$ et $gf \in \mathcal{E}$ alors $g \in \mathcal{E}$; $\quad \xrightarrow{f}\xrightarrow{g}$
- (F) si un morphisme f dans $\mathcal{A}$ se factorise en $f = em$ avec m mono et $e \in \mathcal{E}$, alors aussi en $f = m'e'$ avec m' mono et $e' \in \mathcal{E}$.

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, tail, "m"] \arrow[d, dotted, "e'"'] \arrow[dr, "f"] & \cdot \arrow[d, "e"] \\
\cdot \arrow[r, tail, dotted, "m'"'] & \cdot
\end{tikzcd}$$

Relativement régulier

Exemple (cas absolu): Si $\mathcal{A}$ a des limites finies et des coégalisateurs de paires noyaux, et $\mathcal{E} = \mathrm{RegEpi}\mathcal{A}$, alors $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ est relativement régulière ssi $\mathcal{A}$ est régulière.

Les catégories relativement régulières sont notre contexte pour travailler avec des relations relatives.

Relativement régulier

Exemple (cas absolu): Si $\mathcal{A}$ a des limites finies et des coégalisateurs de paires noyaux, et $\mathcal{E} = \mathrm{RegEpi}\mathcal{A}$, alors $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ est relativement régulière ssi $\mathcal{A}$ est régulière.

Les catégories relativement régulières sont notre contexte pour travailler avec des relations relatives.

$\mathcal{E}$-relations

$\mathcal{E}$-relation $R = (R, r_1, r_2) \colon A \longrightarrow B$:

- Relation $R \overset{\langle r_1, r_2 \rangle}{\rightarrowtail} A \times B$
- $r_1 \colon R \longrightarrow A$ et $r_2 \colon R \longrightarrow B$ dans $\mathcal{E}$.

- L'opposée: $R^\circ = (R, r_2, r_1) \colon B \longrightarrow A$.
- $f \in \mathcal{E} \Rightarrow f = (A, 1_A, f) \colon A \longrightarrow B$ une $\mathcal{E}$-relation grâce à (E1).

$\mathcal{E}$-relations

$\mathcal{E}$-relation $R = (R, r_1, r_2)\colon A \longrightarrow B$:

- Relation $R \overset{\langle r_1, r_2 \rangle}{\rightarrowtail} A \times B$
- $r_1\colon R \longrightarrow A$ et $r_2\colon R \longrightarrow B$ dans $\mathcal{E}$.
- L'opposée: $R^\circ = (R, r_2, r_1)\colon B \longrightarrow A$.
- $f \in \mathcal{E} \Rightarrow f = (A, 1_A, f)\colon A \longrightarrow B$ une $\mathcal{E}$-relation grâce à (E1).

$\mathcal{E}$-relations

$\mathcal{E}$-relation $R = (R, r_1, r_2)\colon A \longrightarrow B$:

- Relation $R \xrightarrow{\langle r_1, r_2 \rangle} A \times B$
- $r_1 : R \longrightarrow A$ et $r_2 : R \longrightarrow B$ dans $\mathcal{E}$.
- L'opposée: $R^\circ = (R, r_2, r_1)\colon B \longrightarrow A$.
- $f \in \mathcal{E} \Rightarrow f = (A, 1_A, f)\colon A \longrightarrow B$ une $\mathcal{E}$-relation grâce à (E1).

$\mathcal{E}$-relations

$\mathcal{E}$-relation $R = (R, r_1, r_2) \colon A \longrightarrow B$:

- Relation $R \overset{\langle r_1, r_2 \rangle}{\rightarrowtail} A \times B$
- $r_1 \colon R \longrightarrow A$ et $r_2 \colon R \longrightarrow B$ dans $\mathcal{E}$.
- L'opposée: $R^\circ = (R, r_2, r_1) \colon B \longrightarrow A$.
- $f \in \mathcal{E} \Rightarrow f = (A, 1_A, f) \colon A \longrightarrow B$ une $\mathcal{E}$-relation grâce à (E1).

Composition des $\mathcal{E}$-relations

Soient $R\colon A \longrightarrow B$ et $S\colon B \longrightarrow C$ des $\mathcal{E}$-relations dans $\mathcal{A}$.

Grâce à (E2), (E3), (E4), $SR \rightarrowtail A \times C$ est une $\mathcal{E}$-relation.

Composition des $\mathcal{E}$-relations

Soient $R \colon A \longrightarrow B$ et $S \colon B \longrightarrow C$ des $\mathcal{E}$-relations dans $\mathcal{A}$.

$$\begin{tikzcd}
 & & P \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
 & R \arrow[dl, "r_1"'] \arrow[dr, "r_2"] & & S \arrow[dl, "s_1"'] \arrow[dr, "s_2"] & \\
A & & B & & C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
P \arrow[r, tail] \arrow[d, dotted, "\in\mathcal{E}"] & R \times S \arrow[d, "r_1 \times s_2"', "\in\mathcal{E}"] \\
SR \arrow[r, tail, dotted] & A \times C
\end{tikzcd}$$

Grâce à (E2), (E3), (E4), $SR \rightarrowtail A \times C$ est une $\mathcal{E}$-relation.

Composition des $\mathcal{E}$-relations

Soient $R\colon A \longrightarrow B$ et $S\colon B \longrightarrow C$ des $\mathcal{E}$-relations dans $\mathcal{A}$.

$$
\begin{tikzcd}
 & & P \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & & \\
 & R \arrow[dl, "r_1"'] & SR \arrow[dll] \arrow[drr] & S \arrow[dr, "s_2"] & \\
A & & & & C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
P \arrow[r, tail] \arrow[d, dotted, "\in\mathcal{E}"] & R \times S \arrow[d, "r_1 \times s_2"', "\in\mathcal{E}"] \\
SR \arrow[r, tail, dotted] & A \times C
\end{tikzcd}
$$

Grâce à (E2), (E3), (E4), $SR \rightarrowtail A \times C$ est une $\mathcal{E}$-relation.

Propriétés des $\mathcal{E}$-relations

Toutes les propriétés “habituelles” des relations sont satisfaites par les $\mathcal{E}$-relations, par exemple (pour $f \in \mathcal{E}$):

- $R \leq R'$ et $S \leq S' \Rightarrow SR \leq S'R'$
- $f^\circ f = \mathrm{R}[f]$ (paire noyau)
- $ff^\circ = 1_B$
- $R = r_2 r_1^\circ$

On peut définir une $\mathcal{E}$-relation réflexive, symétrique, transitive comme d'habitude, et

- R est une $\mathcal{E}$-relation d'équivalence $\mathcal{E}$-effective si c'est la paire noyau d'un $f \in \mathcal{E}$.

Propriétés des $\mathcal{E}$-relations

Toutes les propriétés “habituelles” des relations sont satisfaites par les $\mathcal{E}$-relations, par exemple (pour $f \in \mathcal{E}$):

- $R \leq R'$ et $S \leq S' \Rightarrow SR \leq S'R'$
- $f^\circ f = \mathrm{R}[f]$ (paire noyau)
- $ff^\circ = 1_B$
- $R = r_2 r_1^\circ$

On peut définir une $\mathcal{E}$-relation réflexive, symétrique, transitive comme d'habitude, et

- R est une $\mathcal{E}$-relation d'équivalence $\mathcal{E}$-effective si c'est la paire noyau d'un $f \in \mathcal{E}$.

Propriétés des $\mathcal{E}$-relations

Toutes les propriétés “habituelles” des relations sont satisfaites par les $\mathcal{E}$-relations, par exemple (pour $f \in \mathcal{E}$):

- $R \leq R'$ et $S \leq S' \Rightarrow SR \leq S'R'$
- $f^\circ f = \mathrm{R}[f]$ (paire noyau)
- $ff^\circ = 1_B$
- $R = r_2 r_1^\circ$

On peut définir une $\mathcal{E}$-relation réflexive, symétrique, transitive comme d'habitude, et

- R est une $\mathcal{E}$-relation d'équivalence $\mathcal{E}$-effective si c'est la paire noyau d'un $f \in \mathcal{E}$.

Propriétés des $\mathcal{E}$-relations

Toutes les propriétés "habituelles" des relations sont satisfaites par les $\mathcal{E}$-relations, par exemple (pour $f \in \mathcal{E}$):

- $R \leq R'$ et $S \leq S' \Rightarrow SR \leq S'R'$
- $f^\circ f = \mathrm{R}[f]$ (paire noyau)
- $ff^\circ = 1_B$
- $R = r_2 r_1^\circ$

On peut définir une $\mathcal{E}$-relation réflexive, symétrique, transitive comme d'habitude, et

- R est une $\mathcal{E}$-relation d'équivalence $\mathcal{E}$-effective si c'est la paire noyau d'un $f \in \mathcal{E}$.

Propriétés des $\mathcal{E}$-relations

Toutes les propriétés “habituelles” des relations sont satisfaites par les $\mathcal{E}$-relations, par exemple (pour $f \in \mathcal{E}$):

- $R \leq R'$ et $S \leq S' \Rightarrow SR \leq S'R'$
- $f^\circ f = \mathrm{R}[f]$ (paire noyau)
- $ff^\circ = 1_B$
- $R = r_2 r_1^\circ$

On peut définir une $\mathcal{E}$-relation réflexive, symétrique, transitive comme d'habitude, et

- R est une $\mathcal{E}$-relation d'équivalence $\mathcal{E}$-effective si c'est la paire noyau d'un $f \in \mathcal{E}$.

Propriétés des $\mathcal{E}$-relations

Toutes les propriétés "habituelles" des relations sont satisfaites par les $\mathcal{E}$-relations, par exemple (pour $f \in \mathcal{E}$):

- $R \leq R'$ et $S \leq S' \Rightarrow SR \leq S'R'$
- $f^\circ f = \mathrm{R}[f]$ (paire noyau)
- $ff^\circ = 1_B$
- $R = r_2 r_1^\circ$

On peut définir une $\mathcal{E}$-relation réflexive, symétrique, transitive comme d'habitude, et

- R est une $\mathcal{E}$-relation d'équivalence $\mathcal{E}$-effective si c'est la paire noyau d'un $f \in \mathcal{E}$.

Propriétés des $\mathcal{E}$-relations

Toutes les propriétés “habituelles” des relations sont satisfaites par les $\mathcal{E}$-relations, par exemple (pour $f \in \mathcal{E}$):

- $R \leq R'$ et $S \leq S' \Rightarrow SR \leq S'R'$
- $f^\circ f = \mathrm{R}[f]$ (paire noyau)
- $ff^\circ = 1_B$
- $R = r_2 r_1^\circ$

On peut définir une $\mathcal{E}$-relation réflexive, symétrique, transitive comme d'habitude, et

- R est une $\mathcal{E}$-relation d'équivalence $\mathcal{E}$-effective si c'est la paire noyau d'un $f \in \mathcal{E}$.

Conditions équivalentes pour $\mathcal{E}$-relations

Proposition

Soit $(\mathcal{A},\mathcal{E})$ une catégorie relativement régulière. Les conditions suivantes sont équivalentes:

- *$RSR = SRS$ pour des $\mathcal{E}$-relations d'équivalence R et S;*
- *$RSR = SRS$ pour des $\mathcal{E}$-relations d'équivalence $\mathcal{E}$-effectives;*
- *chaque $\mathcal{E}$-relation P satisfait $PP^\circ PP^\circ = PP^\circ$;*
- *pour chaque $\mathcal{E}$-relation réflexive E, l'$\mathcal{E}$-relation EE° est une $\mathcal{E}$-relation d'équivalence;*
- *pour chaque $\mathcal{E}$-relation réflexive E, EE° est transitive;*
- *pour chaque $\mathcal{E}$-relation réflexive E, on a $EE^\circ = E^\circ E$.*

Même preuve que pour le cas absolu.

Conditions équivalentes pour $\mathcal{E}$-relations

Proposition

Soit $(\mathcal{A},\mathcal{E})$ une catégorie relativement régulière. Les conditions suivantes sont équivalentes:

- *$RSR = SRS$ pour des $\mathcal{E}$-relations d'équivalence R et S;*
- *$RSR = SRS$ pour des $\mathcal{E}$-relations d'équivalence $\mathcal{E}$-effectives;*
- *chaque $\mathcal{E}$-relation P satisfait $PP^{\circ}PP^{\circ} = PP^{\circ}$;*
- *pour chaque $\mathcal{E}$-relation réflexive E, l'$\mathcal{E}$-relation EE° est une $\mathcal{E}$-relation d'équivalence;*
- *pour chaque $\mathcal{E}$-relation réflexive E, EE° est transitive;*
- *pour chaque $\mathcal{E}$-relation réflexive E, on a $EE^{\circ} = E^{\circ}E$.*

Même preuve que pour le cas absolu.

Conditions équivalentes pour $\mathcal{E}$-relations

Proposition

Soit $(\mathcal{A},\mathcal{E})$ une catégorie relativement régulière. Les conditions suivantes sont équivalentes:

- *$RSR = SRS$ pour des $\mathcal{E}$-relations d'équivalence R et S;*
- *$RSR = SRS$ pour des $\mathcal{E}$-relations d'équivalence $\mathcal{E}$-effectives;*
- *chaque $\mathcal{E}$-relation P satisfait $PP^\circ PP^\circ = PP^\circ$;*
- *pour chaque $\mathcal{E}$-relation réflexive E, l'$\mathcal{E}$-relation EE° est une $\mathcal{E}$-relation d'équivalence;*
- *pour chaque $\mathcal{E}$-relation réflexive E, EE° est transitive;*
- *pour chaque $\mathcal{E}$-relation réflexive E, on a $EE^\circ = E^\circ E$.*

Même preuve que pour le cas absolu.

Conditions équivalentes pour $\mathcal{E}$-relations

Proposition

Soit $(\mathcal{A},\mathcal{E})$ une catégorie relativement régulière. Les conditions suivantes sont équivalentes:

- *$RSR = SRS$ pour des $\mathcal{E}$-relations d'équivalence R et S;*
- *$RSR = SRS$ pour des $\mathcal{E}$-relations d'équivalence $\mathcal{E}$-effectives;*
- *chaque $\mathcal{E}$-relation P satisfait $PP^\circ PP^\circ = PP^\circ$;*
- *pour chaque $\mathcal{E}$-relation réflexive E, l'$\mathcal{E}$-relation EE° est une $\mathcal{E}$-relation d'équivalence;*
- *pour chaque $\mathcal{E}$-relation réflexive E, EE° est transitive;*
- *pour chaque $\mathcal{E}$-relation réflexive E, on a $EE^\circ = E^\circ E$.*

Même preuve que pour le cas absolu.

Conditions équivalentes pour $\mathcal{E}$-relations

Proposition

Soit $(\mathcal{A},\mathcal{E})$ une catégorie relativement régulière. Les conditions suivantes sont équivalentes:

- *$RSR = SRS$ pour des $\mathcal{E}$-relations d'équivalence R et S;*
- *$RSR = SRS$ pour des $\mathcal{E}$-relations d'équivalence $\mathcal{E}$-effectives;*
- *chaque $\mathcal{E}$-relation P satisfait $PP^\circ PP^\circ = PP^\circ$;*
- *pour chaque $\mathcal{E}$-relation réflexive E, l'$\mathcal{E}$-relation EE° est une $\mathcal{E}$-relation d'équivalence;*
- *pour chaque $\mathcal{E}$-relation réflexive E, EE° est transitive;*
- *pour chaque $\mathcal{E}$-relation réflexive E, on a $EE^\circ = E^\circ E$.*

Même preuve que pour le cas absolu.

Conditions équivalentes pour $\mathcal{E}$-relations

Proposition

Soit $(\mathcal{A},\mathcal{E})$ une catégorie relativement régulière. Les conditions suivantes sont équivalentes:

- *$RSR = SRS$ pour des $\mathcal{E}$-relations d'équivalence R et S;*
- *$RSR = SRS$ pour des $\mathcal{E}$-relations d'équivalence $\mathcal{E}$-effectives;*
- *chaque $\mathcal{E}$-relation P satisfait $PP^\circ PP^\circ = PP^\circ$;*
- *pour chaque $\mathcal{E}$-relation réflexive E, l'$\mathcal{E}$-relation EE° est une $\mathcal{E}$-relation d'équivalence;*
- *pour chaque $\mathcal{E}$-relation réflexive E, EE° est transitive;*
- *pour chaque $\mathcal{E}$-relation réflexive E, on a $EE^\circ = E^\circ E$.*

Même preuve que pour le cas absolu.

Conditions équivalentes pour $\mathcal{E}$-relations

Proposition

Soit $(\mathcal{A},\mathcal{E})$ une catégorie relativement régulière. Les conditions suivantes sont équivalentes:

- *$RSR = SRS$ pour des $\mathcal{E}$-relations d'équivalence R et S;*
- *$RSR = SRS$ pour des $\mathcal{E}$-relations d'équivalence $\mathcal{E}$-effectives;*
- *chaque $\mathcal{E}$-relation P satisfait $PP^\circ PP^\circ = PP^\circ$;*
- *pour chaque $\mathcal{E}$-relation réflexive E, l'$\mathcal{E}$-relation EE° est une $\mathcal{E}$-relation d'équivalence;*
- *pour chaque $\mathcal{E}$-relation réflexive E, EE° est transitive;*
- *pour chaque $\mathcal{E}$-relation réflexive E, on a $EE^\circ = E^\circ E$.*

Même preuve que pour le cas absolu.

Conditions équivalentes pour $\mathcal{E}$-relations

Proposition

Soit $(\mathcal{A},\mathcal{E})$ une catégorie relativement régulière. Les conditions suivantes sont équivalentes:

- *$RSR = SRS$ pour des $\mathcal{E}$-relations d'équivalence R et S;*
- *$RSR = SRS$ pour des $\mathcal{E}$-relations d'équivalence $\mathcal{E}$-effectives;*
- *chaque $\mathcal{E}$-relation P satisfait $PP^\circ PP^\circ = PP^\circ$;*
- *pour chaque $\mathcal{E}$-relation réflexive E, l'$\mathcal{E}$-relation EE° est une $\mathcal{E}$-relation d'équivalence;*
- *pour chaque $\mathcal{E}$-relation réflexive E, EE° est transitive;*
- *pour chaque $\mathcal{E}$-relation réflexive E, on a $EE^\circ = E^\circ E$.*

Même preuve que pour le cas absolu.

Soient (R, r_1, r_2) une $\mathcal{E}$-relation sur A et $f\colon A \longrightarrow B$ dans $\mathcal{E}$.

$\mathcal{E}$-image $f(R) = S$ de R sur f:

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, dotted, "\varphi", two heads] \arrow[d, tail, "\langle r_1, r_2 \rangle"] & S \arrow[d, dotted, tail, "\langle s_1, s_2 \rangle"] \\
A \times A \arrow[r, "f \times f"', two heads] & B \times B
\end{tikzcd}$$

- R réflexive $\Rightarrow f(R)$ réflexive
- R symétrique $\Rightarrow f(R)$ symétrique
- $f(R) = fRf^\circ = fr_2 r_1^\circ f^\circ$

Soient (R, r_1, r_2) une $\mathcal{E}$-relation sur A et $f\colon A \longrightarrow B$ dans $\mathcal{E}$.

$\mathcal{E}$-image $f(R) = S$ de R sur f:

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[rr, dotted, "\varphi"] \arrow[d, tail, "\langle r_1, r_2\rangle"] \arrow[dd, bend right, "r_1"'] & & S \arrow[d, tail, dotted, "\langle s_1, s_2\rangle"] \arrow[dd, bend left, "s_1"] \\
A \times A \arrow[rr, "f\times f"'] \arrow[d, "\pi_1"] & & B \times B \arrow[d, "\pi_1"'] \\
A \arrow[rr, "f"] & & B
\end{tikzcd}$$

Grâce à (F) la factorisation existe, grâce à (E3) et (E4) S est une $\mathcal{E}$-relation.

- R réflexive $\Rightarrow f(R)$ réflexive
- R symétrique $\Rightarrow f(R)$ symétrique
- $f(R) = fRf^\circ = fr_2r_1^\circ f^\circ$

Soient (R, r_1, r_2) une $\mathcal{E}$-relation sur A et $f\colon A \longrightarrow B$ dans $\mathcal{E}$.

$\mathcal{E}$-image $f(R) = S$ de R sur f:

$$
\begin{tikzcd}
R \arrow[r, dotted, "\varphi'"] \arrow[d, tail] \arrow[dd, bend right=60, "\langle r_1, r_2 \rangle"'] & \cdot \arrow[d, tail, dotted] \\
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "\Delta"] & B \arrow[d, tail, "\Delta"'] \\
A \times A \arrow[r, "f \times f"'] & B \times B
\end{tikzcd}
$$

- R réflexive $\Rightarrow f(R)$ réflexive
- R symétrique $\Rightarrow f(R)$ symétrique
- $f(R) = fRf^{\circ} = fr_2r_1^{\circ}f^{\circ}$

Soient (R, r_1, r_2) une $\mathcal{E}$-relation sur A et $f\colon A \longrightarrow B$ dans $\mathcal{E}$.

$\mathcal{E}$-image $f(R) = S$ de R sur f:

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, dotted, "\varphi"] \arrow[d, tail] \arrow[dd, bend right, "\langle r_1, r_2 \rangle"'] & S \arrow[d, tail, dotted] \arrow[dd, bend left, "\langle s_1, s_2 \rangle"] \\
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "\Delta"] & B \arrow[d, tail, "\Delta"'] \\
A \times A \arrow[r, "f \times f"'] & B \times B
\end{tikzcd}$$

- R réflexive $\Rightarrow f(R)$ réflexive
- R symétrique $\Rightarrow f(R)$ symétrique
- $f(R) = fRf^{\circ} = fr_2r_1^{\circ}f^{\circ}$

Soient (R, r_1, r_2) une $\mathcal{E}$-relation sur A et $f\colon A \longrightarrow B$ dans $\mathcal{E}$.

$\mathcal{E}$-image $f(R) = S$ de R sur f:

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, dotted, "\varphi"] \arrow[d, tail, "\langle r_1, r_2\rangle"] \arrow[dd, bend right=60, "r_1"'] & S \arrow[d, tail, dotted, "\langle s_1, s_2\rangle"] \arrow[dd, bend left=60, "s_1"] \\
A \times A \arrow[r, "f \times f"'] \arrow[d, "\pi_1"] & B \times B \arrow[d, "\pi_1"'] \\
A \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

- R réflexive $\Rightarrow f(R)$ réflexive
- R symétrique $\Rightarrow f(R)$ symétrique
- $f(R) = fRf^\circ = fr_2r_1^\circ f^\circ$

Soient (R, r_1, r_2) une $\mathcal{E}$-relation sur A et $f \colon A \longrightarrow B$ dans $\mathcal{E}$.

$\mathcal{E}$-image $f(R) = S$ de R sur f:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, dotted, "\varphi"] \arrow[d, tail, "\langle r_1, r_2 \rangle"'] & S \arrow[d, dotted, tail, "\langle s_1, s_2 \rangle"] \\ A \times A \arrow[r, "f \times f"'] & B \times B \end{tikzcd}$$

- R réflexive $\Rightarrow f(R)$ réflexive
- R symétrique $\Rightarrow f(R)$ symétrique
- $f(R) = fRf^{\circ} = fr_2r_1^{\circ}f^{\circ}$

Plan

Conditions équivalentes de Goursat

Theorem

Soit $(\mathcal{A},\mathcal{E})$ une catégorie relativement régulière. TFAE:

1. *Axiome de $\mathcal{E}$-Goursat: pour chaque morphisme d'épis scindés*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[l, shift left] \arrow[d, "k"] \\ C \arrow[r, shift left, "g"] & D \arrow[l, shift left] \end{tikzcd}$$

   dans $\mathcal{A}$ avec f, g, h et k dans $\mathcal{E}$, le morphisme induit entre $\mathrm{R}[f]$ et $\mathrm{R}[g]$ est aussi dans $\mathcal{E}$;
2. *l'$\mathcal{E}$-image préserve des $\mathcal{E}$-relations d'équivalence;*
3. *$RSR = SRS$ pour des $\mathcal{E}$-relations d'équivalence R et S.*

Conditions équivalentes de Goursat

Theorem

Soit $(\mathcal{A},\mathcal{E})$ une catégorie relativement régulière. TFAE:

1. *Axiome de $\mathcal{E}$-Goursat: pour chaque morphisme d'épis scindés*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[l, shift left] \arrow[d, "k"] \\ C \arrow[r, shift left, "g"] & D \arrow[l, shift left] \end{tikzcd}$$

   dans $\mathcal{A}$ avec f, g, h et k dans $\mathcal{E}$, le morphisme induit entre $\mathrm{R}[f]$ et $\mathrm{R}[g]$ est aussi dans $\mathcal{E}$;
2. *l'$\mathcal{E}$-image préserve des $\mathcal{E}$-relations d'équivalence;*
3. *$RSR = SRS$ pour des $\mathcal{E}$-relations d'équivalence R et S.*

Conditions équivalentes de Goursat

Theorem

Soit $(\mathcal{A},\mathcal{E})$ une catégorie relativement régulière. TFAE:

1. *Axiome de $\mathcal{E}$-Goursat: pour chaque morphisme d'épis scindés*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[l, shift left] \arrow[d, "k"] \\ C \arrow[r, shift left, "g"] & D \arrow[l, shift left] \end{tikzcd}$$

dans $\mathcal{A}$ avec f, g, h et k dans $\mathcal{E}$, le morphisme induit entre $\mathrm{R}[f]$ et $\mathrm{R}[g]$ est aussi dans $\mathcal{E}$;

2. *l'$\mathcal{E}$-image préserve des $\mathcal{E}$-relations d'équivalence;*
3. *$RSR = SRS$ pour des $\mathcal{E}$-relations d'équivalence R et S.*

Conditions équivalentes de Goursat

Theorem

Soit $(\mathcal{A},\mathcal{E})$ une catégorie relativement régulière. TFAE:

1. *Axiome de $\mathcal{E}$-Goursat: pour chaque morphisme d'épis scindés*
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[l, shift left] \arrow[d, "k"] \\ C \arrow[r, shift left, "g"] & D \arrow[l, shift left] \end{tikzcd}$$
dans $\mathcal{A}$ avec f, g, h et k dans $\mathcal{E}$, le morphisme induit entre $\mathrm{R}[f]$ et $\mathrm{R}[g]$ est aussi dans $\mathcal{E}$;
2. *l'$\mathcal{E}$-image préserve des $\mathcal{E}$-relations d'équivalence;*
3. *$RSR = SRS$ pour des $\mathcal{E}$-relations d'équivalence R et S.*

Esquisse de preuve

1 $\Rightarrow$ 2: R une $\mathcal{E}$-relation d'équivalence $\Rightarrow f(R)$ réflexive et symétrique.

Pour transitivité montrer l'éxistence d'un morphisme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{R}[s_1] \arrow[r, dotted, "t_S"] \arrow[d, shift right, "\pi_1"'] \arrow[d, shift left, "\pi_2"] & S \arrow[d, shift right, "s_1"'] \arrow[d, shift left, "s_2"] \\ S \arrow[r, "s_2"'] & B \end{tikzcd}$$

Esquisse de preuve

$1 \Rightarrow 2$: R une $\mathcal{E}$-relation d'équivalence $\Rightarrow f(R)$ réflexive et symétrique.
Pour transitivité montrer l'éxistence d'un morphisme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{R}[s_1] \arrow[r, dotted, "t_S"] \arrow[d, shift right, "\pi_1"'] \arrow[d, shift left, "\pi_2"] & S \arrow[d, shift right, "s_1"'] \arrow[d, shift left, "s_2"] \\ S \arrow[r, "s_2"'] & B \end{tikzcd}$$

Esquisse de preuve

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{R}[r_1] \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "\overline{\varphi}"'] & R \arrow[r, shift left, "r_1"] \arrow[d, "\varphi"'] & A \arrow[l, shift left, "e_R"] \arrow[d, "f"] \\
\mathrm{R}[s_1] \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & S \arrow[r, shift left, "s_1"] & B \arrow[l, shift left, "e_S"]
\end{tikzcd}$$

- l'axiome de $\mathcal{E}$-Goursat $\Rightarrow \overline{\varphi} \in \mathcal{E}$
- $\overline{\varphi} \in \mathcal{E} \Rightarrow \overline{\varphi}$ un épi régulier $\Rightarrow \overline{\varphi}$ un épi fort
- $\langle s_1, s_2 \rangle$ un mono

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{R}[r_1] \arrow[r, "\overline{\varphi}"] \arrow[d, "\varphi \circ t_R"'] & \mathrm{R}[s_1] \arrow[d, "(s_2 \times s_2) \circ \langle \pi_1, \pi_2 \rangle"] \arrow[dl, dotted, "t_S"'] \\
S \arrow[r, "\langle s_1, s_2 \rangle"'] & B \times B
\end{tikzcd}$$

Esquisse de preuve

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{R}[r_1] \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "\overline{\varphi}"'] & R \arrow[r, shift left, "r_1"] \arrow[d, "\varphi"'] & A \arrow[l, shift left, "e_R"] \arrow[d, "f"] \\
\mathrm{R}[s_1] \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & S \arrow[r, shift left, "s_1"] & B \arrow[l, shift left, "e_S"]
\end{tikzcd}$$

- l'axiome de $\mathcal{E}$-Goursat $\Rightarrow \overline{\varphi} \in \mathcal{E}$
- $\overline{\varphi} \in \mathcal{E} \Rightarrow \overline{\varphi}$ un épi régulier $\Rightarrow \overline{\varphi}$ un épi fort
- $\langle s_1, s_2 \rangle$ un mono

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{R}[r_1] \arrow[r, "\overline{\varphi}"] \arrow[d, "\varphi \circ t_R"'] & \mathrm{R}[s_1] \arrow[d, "(s_2 \times s_2) \circ \langle \pi_1, \pi_2 \rangle"] \arrow[dl, dotted, "t_S"'] \\
S \arrow[r, "\langle s_1, s_2 \rangle"'] & B \times B
\end{tikzcd}$$

Esquisse de preuve

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{R}[r_1] \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "\overline{\varphi}"'] & R \arrow[r, shift left, "r_1"] \arrow[d, "\varphi"'] & A \arrow[l, shift left, "e_R"] \arrow[d, "f"] \\
\mathrm{R}[s_1] \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & S \arrow[r, shift left, "s_1"] & B \arrow[l, shift left, "e_S"]
\end{tikzcd}$$

- l'axiome de $\mathcal{E}$-Goursat $\Rightarrow \overline{\varphi} \in \mathcal{E}$
- $\overline{\varphi} \in \mathcal{E} \Rightarrow \overline{\varphi}$ un épi régulier $\Rightarrow \overline{\varphi}$ un épi fort
- $\langle s_1, s_2 \rangle$ un mono

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{R}[r_1] \arrow[r, "\overline{\varphi}"] \arrow[d, "\varphi \circ t_R"'] & \mathrm{R}[s_1] \arrow[d, "(s_2 \times s_2) \circ \langle \pi_1, \pi_2 \rangle"] \arrow[dl, dotted, "t_S"'] \\
S \arrow[r, "\langle s_1, s_2 \rangle"'] & B \times B
\end{tikzcd}$$

Esquisse de preuve

$2 \Rightarrow 3$: Montrer EE° est une $\mathcal{E}$-relation d'équivalence pour (E, e_1, e_2) reflexive.

- $EE^\circ = e_2 e_1^\circ e_1 e_2^\circ = e_2 \mathrm{R}[e_1] e_2^\circ = e_2(\mathrm{R}[e_1])$
- $\mathrm{R}[e_1]$ une $\mathcal{E}$-relation d'équivalence, $e_2 \in \mathcal{E}$;
- l'$\mathcal{E}$-image préserve des $\mathcal{E}$-relations d'équivalence.

Alors $EE^\circ = e_2(\mathrm{R}[e_1])$ est une $\mathcal{E}$-relation d'équivalence.

Esquisse de preuve

$2 \Rightarrow 3$: Montrer EE° est une $\mathcal{E}$-relation d'équivalence pour (E, e_1, e_2) reflexive.

- $EE^\circ = e_2 e_1^\circ e_1 e_2^\circ = e_2 \mathrm{R}[e_1] e_2^\circ = e_2(\mathrm{R}[e_1])$
- $\mathrm{R}[e_1]$ une $\mathcal{E}$-relation d'équivalence, $e_2 \in \mathcal{E}$;
- l'$\mathcal{E}$-image préserve des $\mathcal{E}$-relations d'équivalence.

Alors $EE^\circ = e_2(\mathrm{R}[e_1])$ est une $\mathcal{E}$-relation d'équivalence.

Esquisse de preuve

$2 \Rightarrow 3$: Montrer EE° est une $\mathcal{E}$-relation d'équivalence pour (E, e_1, e_2) reflexive.

- $EE^\circ = e_2 e_1^\circ e_1 e_2^\circ = e_2 \mathrm{R}[e_1] e_2^\circ = e_2(\mathrm{R}[e_1])$
- $\mathrm{R}[e_1]$ une $\mathcal{E}$-relation d'équivalence, $e_2 \in \mathcal{E}$;
- l'$\mathcal{E}$-image préserve des $\mathcal{E}$-relations d'équivalence.

Alors $EE^\circ = e_2(\mathrm{R}[e_1])$ est une $\mathcal{E}$-relation d'équivalence.

Esquisse de preuve

$2 \Rightarrow 3$: Montrer EE° est une $\mathcal{E}$-relation d'équivalence pour (E, e_1, e_2) reflexive.

- $EE^\circ = e_2 e_1^\circ e_1 e_2^\circ = e_2 \mathrm{R}[e_1] e_2^\circ = e_2(\mathrm{R}[e_1])$
- $\mathrm{R}[e_1]$ une $\mathcal{E}$-relation d'équivalence, $e_2 \in \mathcal{E}$;
- l'$\mathcal{E}$-image préserve des $\mathcal{E}$-relations d'équivalence.

Alors $EE^\circ = e_2(\mathrm{R}[e_1])$ est une $\mathcal{E}$-relation d'équivalence.

Esquisse de preuve

$2 \Rightarrow 3$: Montrer EE° est une $\mathcal{E}$-relation d'équivalence pour (E, e_1, e_2) reflexive.

- $EE^\circ = e_2 e_1^\circ e_1 e_2^\circ = e_2 \mathrm{R}[e_1] e_2^\circ = e_2(\mathrm{R}[e_1])$
- $\mathrm{R}[e_1]$ une $\mathcal{E}$-relation d'équivalence, $e_2 \in \mathcal{E}$;
- l'$\mathcal{E}$-image préserve des $\mathcal{E}$-relations d'équivalence.

Alors $EE^\circ = e_2(\mathrm{R}[e_1])$ est une $\mathcal{E}$-relation d'équivalence.

Esquisse de preuve

$3 \Rightarrow 1$:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[l, bend left] \arrow[d, "k"] \\
C \arrow[r, "g"] & D \arrow[l, bend left]
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{R}[h] \longrightarrow \mathrm{R}[k]$ dans $\mathcal{E} \Rightarrow f(\mathrm{R}[h]) = \mathrm{R}[k]$. On calcule $h(\mathrm{R}[f])$:

$$\begin{aligned}
h(\mathrm{R}[f]) &= hf^\circ fh^\circ & &= hh^\circ hf^\circ fh^\circ hh^\circ \\
&= h\mathrm{R}[h]\mathrm{R}[f]\mathrm{R}[h]h^\circ & &= h\mathrm{R}[f]\mathrm{R}[h]\mathrm{R}[f]h^\circ \\
&= hf^\circ fh^\circ hf^\circ fh^\circ & &= hf^\circ f(\mathrm{R}[h])fh^\circ \\
&= hf^\circ k^\circ kfh^\circ & &= hh^\circ g^\circ ghh^\circ \\
&= g^\circ g & &= \mathrm{R}[g]
\end{aligned}$$

Esquisse de preuve

$3 \Rightarrow 1$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[l, shift left] \arrow[d, "k"] \\ C \arrow[r, shift left, "g"] & D \arrow[l, shift left] \end{tikzcd}$$

$\mathrm{R}[h] \longrightarrow \mathrm{R}[k]$ dans $\mathcal{E} \Rightarrow f(\mathrm{R}[h]) = \mathrm{R}[k]$. On calcule $h(\mathrm{R}[f])$:

$$\begin{aligned} h(\mathrm{R}[f]) &= hf^\circ fh^\circ & &= hh^\circ hf^\circ fh^\circ hh^\circ \\ &= h\mathrm{R}[h]\mathrm{R}[f]\mathrm{R}[h]h^\circ & &= h\mathrm{R}[f]\mathrm{R}[h]\mathrm{R}[f]h^\circ \\ &= hf^\circ fh^\circ hf^\circ fh^\circ & &= hf^\circ f(\mathrm{R}[h])fh^\circ \\ &= hf^\circ k^\circ kfh^\circ & &= hh^\circ g^\circ ghh^\circ \\ &= g^\circ g & &= \mathrm{R}[g] \end{aligned}$$

Esquisse de preuve

$3 \Rightarrow 1$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[l, shift left] \arrow[d, "k"] \\ C \arrow[r, shift left, "g"] & D \arrow[l, shift left] \end{tikzcd}$$

$\mathrm{R}[h] \longrightarrow \mathrm{R}[k]$ dans $\mathcal{E} \Rightarrow f(\mathrm{R}[h]) = \mathrm{R}[k]$. On calcule $h(\mathrm{R}[f])$:

$$\begin{aligned} h(\mathrm{R}[f]) &= hf^\circ fh^\circ && = hh^\circ hf^\circ fh^\circ hh^\circ \\ &= h\mathrm{R}[h]\mathrm{R}[f]\mathrm{R}[h]h^\circ && = h\mathrm{R}[f]\mathrm{R}[h]\mathrm{R}[f]h^\circ \\ &= hf^\circ fh^\circ hf^\circ fh^\circ && = hf^\circ f(\mathrm{R}[h])fh^\circ \\ &= hf^\circ k^\circ kfh^\circ && = hh^\circ g^\circ ghh^\circ \\ &= g^\circ g && = \mathrm{R}[g] \end{aligned}$$

Esquisse de preuve

$3 \Rightarrow 1$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[l, shift left] \arrow[d, "k"] \\ C \arrow[r, shift left, "g"] & D \arrow[l, shift left] \end{tikzcd}$$

$\mathrm{R}[h] \longrightarrow \mathrm{R}[k]$ dans $\mathcal{E} \Rightarrow f(\mathrm{R}[h]) = \mathrm{R}[k]$. On calcule $h(\mathrm{R}[f])$:

$$\begin{aligned} h(\mathrm{R}[f]) &= hf^\circ fh^\circ & &= hh^\circ hf^\circ fh^\circ hh^\circ \\ &= h\mathrm{R}[h]\mathrm{R}[f]\mathrm{R}[h]h^\circ & &= h\mathrm{R}[f]\mathrm{R}[h]\mathrm{R}[f]h^\circ \\ &= hf^\circ fh^\circ hf^\circ fh^\circ & &= hf^\circ f(\mathrm{R}[h])fh^\circ \\ &= hf^\circ k^\circ kfh^\circ & &= hh^\circ g^\circ ghh^\circ \\ &= g^\circ g & &= \mathrm{R}[g] \end{aligned}$$

Esquisse de preuve

$3 \Rightarrow 1$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[l, shift left] \arrow[d, "k"] \\ C \arrow[r, shift left, "g"] & D \arrow[l, shift left] \end{tikzcd}$$

$\mathrm{R}[h] \longrightarrow \mathrm{R}[k]$ dans $\mathcal{E} \Rightarrow f(\mathrm{R}[h]) = \mathrm{R}[k]$. On calcule $h(\mathrm{R}[f])$:

$$\begin{aligned} h(\mathrm{R}[f]) &= hf^\circ fh^\circ & &= hh^\circ hf^\circ fh^\circ hh^\circ \\ &= h\mathrm{R}[h]\mathrm{R}[f]\mathrm{R}[h]h^\circ & &= h\mathrm{R}[f]\mathrm{R}[h]\mathrm{R}[f]h^\circ \\ &= hf^\circ fh^\circ hf^\circ fh^\circ & &= hf^\circ f(\mathrm{R}[h])fh^\circ \\ &= hf^\circ k^\circ kfh^\circ & &= hh^\circ g^\circ ghh^\circ \\ &= g^\circ g & &= \mathrm{R}[g] \end{aligned}$$

Esquisse de preuve

$3 \Rightarrow 1$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[l, shift left, bend left] \arrow[d, "k"] \\ C \arrow[r, shift left, "g"] & D \arrow[l, shift left, bend left] \end{tikzcd}$$

$\mathrm{R}[h] \longrightarrow \mathrm{R}[k]$ dans $\mathcal{E} \Rightarrow f(\mathrm{R}[h]) = \mathrm{R}[k]$. On calcule $h(\mathrm{R}[f])$:

$$\begin{aligned} h(\mathrm{R}[f]) &= hf^\circ fh^\circ & &= hh^\circ hf^\circ fh^\circ hh^\circ \\ &= h\mathrm{R}[h]\mathrm{R}[f]\mathrm{R}[h]h^\circ & &= h\mathrm{R}[f]\mathrm{R}[h]\mathrm{R}[f]h^\circ \\ &= hf^\circ fh^\circ hf^\circ fh^\circ & &= hf^\circ f(\mathrm{R}[h])fh^\circ \\ &= hf^\circ k^\circ kfh^\circ & &= hh^\circ g^\circ ghh^\circ \\ &= g^\circ g & &= \mathrm{R}[g] \end{aligned}$$

Esquisse de preuve

$3 \Rightarrow 1$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[l, bend left] \arrow[d, "k"] \\ C \arrow[r, shift left, "g"] & D \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

$\mathrm{R}[h] \longrightarrow \mathrm{R}[k]$ dans $\mathcal{E} \Rightarrow f(\mathrm{R}[h]) = \mathrm{R}[k]$. On calcule $h(\mathrm{R}[f])$:

$$\begin{aligned} h(\mathrm{R}[f]) &= hf^\circ fh^\circ & &= hh^\circ hf^\circ fh^\circ hh^\circ \\ &= h\mathrm{R}[h]\mathrm{R}[f]\mathrm{R}[h]h^\circ & &= h\mathrm{R}[f]\mathrm{R}[h]\mathrm{R}[f]h^\circ \\ &= hf^\circ fh^\circ hf^\circ fh^\circ & &= hf^\circ f(\mathrm{R}[h])fh^\circ \\ &= hf^\circ k^\circ kfh^\circ & &= hh^\circ g^\circ ghh^\circ \\ &= g^\circ g & &= \mathrm{R}[g] \end{aligned}$$

Esquisse de preuve

$3 \Rightarrow 1$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[l, bend left] \arrow[d, "k"] \\ C \arrow[r, shift left, "g"] & D \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

$\mathrm{R}[h] \longrightarrow \mathrm{R}[k]$ dans $\mathcal{E} \Rightarrow f(\mathrm{R}[h]) = \mathrm{R}[k]$. On calcule $h(\mathrm{R}[f])$:

$$\begin{aligned} h(\mathrm{R}[f]) &= hf^\circ fh^\circ & &= hh^\circ hf^\circ fh^\circ hh^\circ \\ &= h\mathrm{R}[h]\mathrm{R}[f]\mathrm{R}[h]h^\circ & &= h\mathrm{R}[f]\mathrm{R}[h]\mathrm{R}[f]h^\circ \\ &= hf^\circ fh^\circ hf^\circ fh^\circ & &= hf^\circ f(\mathrm{R}[h])fh^\circ \\ &= hf^\circ k^\circ kfh^\circ & &= hh^\circ g^\circ ghh^\circ \\ &= g^\circ g & &= \mathrm{R}[g] \end{aligned}$$

Esquisse de preuve

$3 \Rightarrow 1$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[l, shift left] \arrow[d, "k"] \\ C \arrow[r, shift left, "g"] & D \arrow[l, shift left] \end{tikzcd}$$

$\mathrm{R}[h] \longrightarrow \mathrm{R}[k]$ dans $\mathcal{E} \Rightarrow f(\mathrm{R}[h]) = \mathrm{R}[k]$. On calcule $h(\mathrm{R}[f])$:

$$\begin{aligned} h(\mathrm{R}[f]) &= hf^\circ fh^\circ & &= hh^\circ hf^\circ fh^\circ hh^\circ \\ &= h\mathrm{R}[h]\mathrm{R}[f]\mathrm{R}[h]h^\circ & &= h\mathrm{R}[f]\mathrm{R}[h]\mathrm{R}[f]h^\circ \\ &= hf^\circ fh^\circ hf^\circ fh^\circ & &= hf^\circ f(\mathrm{R}[h])fh^\circ \\ &= hf^\circ k^\circ kfh^\circ & &= hh^\circ g^\circ ghh^\circ \\ &= g^\circ g & &= \mathrm{R}[g] \end{aligned}$$

Esquisse de preuve

$3 \Rightarrow 1$:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{R}[f] \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[l, shift left] \arrow[d, "k"] \\
\mathrm{R}[g] \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & C \arrow[r, shift left, "g"] & D \arrow[l, shift left]
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{R}[h] \longrightarrow \mathrm{R}[k]$ dans $\mathcal{E} \Rightarrow f(\mathrm{R}[h]) = \mathrm{R}[k]$. On calcule $h(\mathrm{R}[f])$:

$$\begin{aligned}
h(\mathrm{R}[f]) &= hf^\circ fh^\circ & &= hh^\circ hf^\circ fh^\circ hh^\circ \\
&= h\mathrm{R}[h]\mathrm{R}[f]\mathrm{R}[h]h^\circ & &= h\mathrm{R}[f]\mathrm{R}[h]\mathrm{R}[f]h^\circ \\
&= hf^\circ fh^\circ hf^\circ fh^\circ & &= hf^\circ f(\mathrm{R}[h])fh^\circ \\
&= hf^\circ k^\circ kfh^\circ & &= hh^\circ g^\circ ghh^\circ \\
&= g^\circ g & &= \mathrm{R}[g]
\end{aligned}$$

Catégorie relativement de Goursat

Une catégorie relativement de Goursat est une catégorie relativement régulière $(\mathcal{A},\mathcal{E})$ qui satisfait en plus

- Axiome de $\mathcal{E}$-Goursat: pour chaque morphisme d'épis scindés

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[d] & B \arrow[l, shift left, bend left] \arrow[d] \\ C \arrow[r, shift left, "g"] & D \arrow[l, shift left, bend left] \end{tikzcd}$$

dans $\mathcal{A}$ avec f, g, h et k dans $\mathcal{E}$, le morphisme induit entre $\mathrm{R}[f]$ et $\mathrm{R}[g]$ est aussi dans $\mathcal{E}$.

Catégorie relativement de Goursat

Une catégorie relativement de Goursat est une catégorie relativement régulière $(\mathcal{A},\mathcal{E})$ qui satisfait en plus

- Axiome de $\mathcal{E}$-Goursat: pour chaque morphisme d'épis scindés

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[d] & B \arrow[l, shift left] \arrow[d] \\ C \arrow[r, shift left, "g"] & D \arrow[l, shift left] \end{tikzcd}$$

  dans $\mathcal{A}$ avec f, g, h et k dans $\mathcal{E}$, le morphisme induit entre $\mathrm{R}[f]$ et $\mathrm{R}[g]$ est aussi dans $\mathcal{E}$.

Lemme des neuf relatif

Lemme des neuf dénormalisé relatif:

$$\begin{tikzcd}
\overline{F} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & F \arrow[r] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & G \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\
H \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[d] \\
K \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & B \arrow[r] & D
\end{tikzcd}$$

- Toutes les colonnes et la ligne centrale sont $\mathcal{E}$-exactes (paire noyau et coégalisateur dans $\mathcal{E}$);
- la première ligne est $\mathcal{E}$-exacte $\Leftrightarrow$ la dernière ligne est $\mathcal{E}$-exacte.

Lemme des neuf relatif

Lemme des neuf dénormalisé relatif:

$$
\begin{tikzcd}
\overline{F} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & F \arrow[r] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & G \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\
H \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[d] \\
K \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & B \arrow[r] & D
\end{tikzcd}
$$

- Toutes les colonnes et la ligne centrale sont $\mathcal{E}$-exactes (paire noyau et coégalisateur dans $\mathcal{E}$);
- la première ligne est $\mathcal{E}$-exacte $\Leftrightarrow$ la dernière ligne est $\mathcal{E}$-exacte.

Lemme de neuf rélatif

On peut montrer:

- $(\mathcal{A},\mathcal{E})$ une catégorie relativement de Goursat $\Rightarrow$ le lemme de neuf relatif est valide; (cas absolu: montré par Lack)
- une moitié du lemme de neuf relatif $\Rightarrow$ l'autre moitié du lemme de neuf relatif;
- une moitié du lemme de neuf relatif $\Rightarrow$ l'axiome de $\mathcal{E}$-Goursat. (cas absolu: montré par Gran, Rodelo)

Lemme de neuf rélatif

On peut montrer:

- $(\mathcal{A},\mathcal{E})$ une catégorie relativement de Goursat $\Rightarrow$ le lemme de neuf relatif est valide; (cas absolu: montré par Lack)
- une moitié du lemme de neuf relatif $\Rightarrow$ l'autre moitié du lemme de neuf relatif;
- une moitié du lemme de neuf relatif $\Rightarrow$ l'axiome de $\mathcal{E}$-Goursat. (cas absolu: montré par Gran, Rodelo)

Lemme de neuf rélatif

On peut montrer:

- $(\mathcal{A},\mathcal{E})$ une catégorie relativement de Goursat $\Rightarrow$ le lemme de neuf relatif est valide;
  (cas absolu: montré par Lack)
- une moitié du lemme de neuf relatif $\Rightarrow$ l'autre moitié du lemme de neuf relatif;
- une moitié du lemme de neuf relatif $\Rightarrow$ l'axiome de $\mathcal{E}$-Goursat.
  (cas absolu: montré par Gran, Rodelo)

Catégorie relativement de Mal'tsev

Une catégorie relativement de Mal'tsev est une catégorie relativement régulière $(\mathcal{A},\mathcal{E})$ qui satisfait en plus

- Axiome de $\mathcal{E}$-Mal'tsev: pour chaque morphisme d'épis scindés

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[l, bend left] \arrow[d, "k"] \\ C \arrow[r, "g"] & D \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

dans $\mathcal{A}$ avec f, g, h et k dans $\mathcal{E}$, le morphisme induit $\langle f, h \rangle : A \longrightarrow B \times_D C$ vers le pullback est dans $\mathcal{E}$.

Catégorie relativement de Mal'tsev

Une catégorie relativement de Mal'tsev est une catégorie relativement régulière $(\mathcal{A},\mathcal{E})$ qui satisfait en plus

- Axiome de $\mathcal{E}$-Mal'tsev: pour chaque morphisme d'épis scindés

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[l, shift left] \arrow[d, "k"] \\ C \arrow[r, shift left, "g"] & D \arrow[l, shift left] \end{tikzcd}$$

dans $\mathcal{A}$ avec f, g, h et k dans $\mathcal{E}$, le morphisme induit $\langle f, h\rangle : A \longrightarrow B \times_D C$ vers le pullback est dans $\mathcal{E}$.

Conditions équivalentes de Mal'tsev

Theorem

Soit $(\mathcal{A},\mathcal{E})$ une catégorie relativement régulière. TFAE:

1. *l'axiome de $\mathcal{E}$-Mal'tsev;*
2. *$RS = SR$ pour des $\mathcal{E}$-relation d'équivalence;*
3. *chaque $\mathcal{E}$-relation réflexive E est une $\mathcal{E}$-relation d'équivalence;*
4. *chaque objet $\mathcal{E}$-simplicial est $\mathcal{E}$-Kan.*

Conditions équivalentes de Mal'tsev

Theorem

Soit $(\mathcal{A},\mathcal{E})$ une catégorie relativement régulière. TFAE:

1. *l'axiome de $\mathcal{E}$-Mal'tsev;*
2. *$RS = SR$ pour des $\mathcal{E}$-relation d'équivalence;*
3. *chaque $\mathcal{E}$-relation réflexive E est une $\mathcal{E}$-relation d'équivalence;*
4. *chaque objet $\mathcal{E}$-simplicial est $\mathcal{E}$-Kan.*

Conditions équivalentes de Mal'tsev

Theorem

Soit $(\mathcal{A},\mathcal{E})$ une catégorie relativement régulière. TFAE:

1. *l'axiome de $\mathcal{E}$-Mal'tsev;*
2. *$RS = SR$ pour des $\mathcal{E}$-relation d'équivalence;*
3. *chaque $\mathcal{E}$-relation réflexive E est une $\mathcal{E}$-relation d'équivalence;*
4. *chaque objet $\mathcal{E}$-simplicial est $\mathcal{E}$-Kan.*

Conditions équivalentes de Mal'tsev

Theorem

Soit $(\mathcal{A},\mathcal{E})$ une catégorie relativement régulière. TFAE:

1. *l'axiome de $\mathcal{E}$-Mal'tsev;*
2. *$RS = SR$ pour des $\mathcal{E}$-relation d'équivalence;*
3. *chaque $\mathcal{E}$-relation réflexive E est une $\mathcal{E}$-relation d'équivalence;*
4. *chaque objet $\mathcal{E}$-simplicial est $\mathcal{E}$-Kan.*

Conditions équivalentes de Mal'tsev

Theorem

Soit $(\mathcal{A},\mathcal{E})$ une catégorie relativement régulière. TFAE:

1. *l'axiome de $\mathcal{E}$-Mal'tsev;*
2. *$RS = SR$ pour des $\mathcal{E}$-relation d'équivalence;*
3. *chaque $\mathcal{E}$-relation réflexive E est une $\mathcal{E}$-relation d'équivalence;*
4. *chaque objet $\mathcal{E}$-simplicial est $\mathcal{E}$-Kan.*

Comparaison

L'axiome de $\mathcal{E}$-Mal'tsev $\Rightarrow$ l'axiome de $\mathcal{E}$-Goursat

par exemple via:
$RS = SR$ pour tout les $\mathcal{E}$-relations d'équivalence $\Rightarrow$
$RSR = SRS$ pour tout les $\mathcal{E}$-relations d'équivalence

Comparaison

L'axiome de $\mathcal{E}$-Mal'tsev $\Rightarrow$ l'axiome de $\mathcal{E}$-Goursat

par exemple via:
$RS = SR$ pour tout les $\mathcal{E}$-relations d'équivalence $\Rightarrow$
$RSR = SRS$ pour tout les $\mathcal{E}$-relations d'équivalence

Résumé

- On peut définir une catégorie relativement de Goursat.
- Les conditions équivalentes du cas absolu peuvent être adapté dans le cas relatif:
  - l'Axiome de $\mathcal{E}$-Goursat ($\mathcal{E}$-Goursat pushout);
  - l'$\mathcal{E}$-image préserve des $\mathcal{E}$-relations d'équivalence;
  - $RSR = SRS$ pour des $\mathcal{E}$-relations d'équivalence;
  - le lemme de neuf dénormalisé relatif.

Résumé

- On peut définir une catégorie relativement de Goursat.
- Les conditions équivalentes du cas absolu peuvent être adapté dans le cas relatif:
  - l'Axiome de $\mathcal{E}$-Goursat ($\mathcal{E}$-Goursat pushout);
  - l'$\mathcal{E}$-image préserve des $\mathcal{E}$-relations d'équivalence;
  - $RSR = SRS$ pour des $\mathcal{E}$-relations d'équivalence;
  - le lemme de neuf dénormalisé relatif.

Résumé

- On peut définir une catégorie relativement de Goursat.
- Les conditions équivalentes du cas absolu peuvent être adapté dans le cas relatif:
  - l'Axiome de $\mathcal{E}$-Goursat ($\mathcal{E}$-Goursat pushout);
  - l'$\mathcal{E}$-image préserve des $\mathcal{E}$-relations d'équivalence;
  - $RSR = SRS$ pour des $\mathcal{E}$-relations d'équivalence;
  - le lemme de neuf dénormalisé relatif.

Résumé

- On peut définir une catégorie relativement de Goursat.
- Les conditions équivalentes du cas absolu peuvent être adapté dans le cas relatif:
  - l'Axiome de $\mathcal{E}$-Goursat ($\mathcal{E}$-Goursat pushout);
  - l'$\mathcal{E}$-image préserve des $\mathcal{E}$-relations d'équivalence;
  - $RSR = SRS$ pour des $\mathcal{E}$-relations d'équivalence;
  - le lemme de neuf dénormalisé relatif.

Résumé

- On peut définir une catégorie relativement de Goursat.
- Les conditions équivalentes du cas absolu peuvent être adapté dans le cas relatif:
  - l'Axiome de $\mathcal{E}$-Goursat ($\mathcal{E}$-Goursat pushout);
  - l'$\mathcal{E}$-image préserve des $\mathcal{E}$-relations d'équivalence;
  - $RSR = SRS$ pour des $\mathcal{E}$-relations d'équivalence;
  - le lemme de neuf dénormalisé relatif.

Résumé

- On peut définir une catégorie relativement de Goursat.
- Les conditions équivalentes du cas absolu peuvent être adapté dans le cas relatif:
  - l'Axiome de $\mathcal{E}$-Goursat ($\mathcal{E}$-Goursat pushout);
  - l'$\mathcal{E}$-image préserve des $\mathcal{E}$-relations d'équivalence;
  - $RSR = SRS$ pour des $\mathcal{E}$-relations d'équivalence;
  - le lemme de neuf dénormalisé relatif.

Merci pour écouter !